Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1894.

Göttingen,

Commissionsverlag der Dieterich'schen Verlagsbuchhandlung.

1895.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1894.

Abegg s. Nernst.

L. Aschoff, Zur Frage der atypischen Epithelwucherung und der Entstehung pathologischer Drüsenbildungen . . . . S. 250

P. Bachmetjew, Hauptresultate der Untersuchungen über die elektrischen Erdströme in Bulgarien . . . . „ 324

J. Bohls, Mitteilungen über Fang und Lebensweise von Lepidosiren aus Paraguay . . . . „ 80

C. Brodmann, Einige Beobachtungen über die Festigkeit von Glasstäben . . . . „ 44

F. v. Dalwigk, Ueber den Ersatz des Dirichlet'schen Princips „ 161

R. Dedekind, Zur Theorie der Ideale . . . . „ 272

J. Disse, Ueber Epithelknospen in der Regio olfactoria der Säuger . . . . „ 66

P. Drude, Zum Studium des elektrischen Resonators . . . „ 189

E. Ehlers, Ueber Lepidosiren paradoxa Fitz. und articulata n. s. aus Paraguay . . . . „ 84

W. Felgentraeger, Die Isoklinenkarte von Whiston und die säkulare Aenderung der magnetischen Inklination im östlichen England . . . . „ 129

R. Fricke, Eine Anwendung der Idealtheorie auf die Substitutionsgruppen der automorphen Functionen . . . . „ 106

C. Fromme, Ueber die Selbstinduction und electrostatische Capacität von Widerstandsrollen und ihren Einfluß auf magnetische Erscheinungen . . . . „ 154

P. Günther, Die Untersuchungen von Gauss in der Theorie der elliptischen Funktionen . . . . „ 92

R. Haussner, Ueber die Zahlencoefficienten in den Weierstrass'schen σ-Reihen . . . . „ 299

O. Henrici, Ueber einen neuen harmonischen Analysator . „ 30

J. Hermes, Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile . . . . „ 170

D. Hilbert, Grundzüge einer Theorie der Galois'schen Zahlkörper „ 224

A. Hurwitz, Zur Theorie der Ideale . . . . „ 291

A. v. Koenen, Ueber das Alter der Erzgänge des Harzes . S. 65
— Ueber die geologische Kartirung des südl. Hannover „ 187
W. Nernst und R. Abegg. Ueber den Gefrierpunkt verdünnter Lösungen . . . . „ 141
A. Peter, Culturversuche mit ruhenden Samen. II. . . . „ 373
G. Pick, Ueber invariante Processe auf binären Gebieten höheren Geschlechtes . . . . „ 311
E. Riecke, Zur Lehre von der Quellung . . . . „ 1
— Der Satz vom thermodynamischen Potential beim Gleichgewichte eines heterogenen Systems mit Anwendung auf die Theorie von van der Waals und das Gesetz des Siedepunctes . . . . „ 117
— Ueber das Gleichgewicht zwischen einem festen homogen deformirten Körper und einer flüssigen Phase, insbesondere über die Depression des Schmelzpunctes durch einseitige Spannung . . . . „ 278
— Ueber die Zustandsgleichung von Clausius . . „ 285
E. Ritter, Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes auf Formenschaaren, die sich bei Umläufen auf einer Riemann'schen Fläche linear substituiren . . . . „ 328
K. Schering und C. Zeissig, Neue photographische Registrirmethode für die Zeit und den Stand von Magneten in Magnetometern und Galvanometern . . . . „ 237
F. Schilling, Der Fundamentalbereich der Schwarz'schen *s*-Function im Falle complexer Exponenten . . . . . „ 261
A. Schönflies, Ueber die Eberhard'schen Hexagonoide . . „ 316
W. Voigt, Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie (Fortsetzung) . . . . „ 33
— Ueber Medien ohne innere Kräfte und eine durch sie gelieferte mechanische Deutung der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen . . . . „ 72
— Piëzo- und Pyroelectricität, diëlectrische Influenz und Electrostriction bei Krystallen ohne Symmetriecentrum „ 343
O. Wallach, Ueber das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone. II. . . . . „ 59
— Ueber Verbindungen der Carvonreihe und das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone. III. . . . . „ 165
C. Zeissig siehe Schering.

Zur Lehre von der Quellung.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Januar 1894.

Um aus chemischer Energie mechanische Arbeit zu gewinnen, verwendet die Technik vor Allem zwei Maschinen, welche auf wesentlich verschiedenen Principien beruhen, die Dampfmaschine und den Gasmotor. Bei der Dampfmaschine dient der in einem labilen chemischen Systeme vorhandene Vorrath von Energie zur Herstellung einer Wärmequelle von thunlichst hoher, konstanter Temperatur. Die Umwandlung der Wärme in Arbeit geschieht durch einen Kreisproceß, der zwischen jener Wärmequelle und einem Reservoir von konstanter und möglichst niedriger Temperatur sich abspielt. Bei der Gasmaschine haben wir auf der einen Seite ein Reservoir, welches mit dem explosibelen Gasgemisch gefüllt ist, auf der anderen den Luftraum. Wir schließen zuerst den Cylinder der Maschine ab gegen den Luftraum und verbinden ihn mit dem Gasraum; wenn wir dann den in dem Cylinder beweglichen Kolben etwas zurückziehen, so tritt eine bestimmte Menge des explosibelen Gases in den Raum unter dem Kolben ein; ist der Druck auf beiden Seiten gleich, so geschieht das ohne Arbeit. Nun stellen wir den Kolben fest und, während der Cylinder gegen Wärmeverlust geschützt wird, bringen wir das Gemisch zur Explosion, wobei die chemische Energie sich in Wärme verwandelt; lösen wir den Kolben, so dehnt sich das heiße Gas aus; es wird Arbeit geleistet, während gleichzeitig Abkühlung eintritt; der in Arbeit verwandelte Theil der Explosionswärme ist um so größer, je besser der Cylinder gegen Wärmeabgabe geschützt, je niedriger die schließlich erreichte Temperatur ist. Läßt man die Abkühlung so weit gehen, daß der Druck in dem Cylinder gleich dem Luftdruck wird, so kann man den Cylinder mit dem Luftraum verbinden und den Kolben zurückschieben, ohne Arbeit zu leisten;

das Produkt der Explosion wird sammt der in ihm noch vorhandenen Wärmeenergie in die Luft hinausgetrieben und der Cylinder ist zur Aufnahme einer zweiten Gasmenge bereit. Mit dieser kann der geschilderte Vorgang wiederholt und so durch Verbrauch von immer neuen Gasmengen immer neue Arbeit gewonnen werden.

Darüber, daß auch der Muskel eine Maschine ist, in welcher chemische Energie in mechanische verwandelt werden kann, besteht keine Meinungsverschiedenheit; die Frage ist nur, auf welchem Wege die Verwandlung erreicht wird. Findet der Muskel sein Analogon in der Dampfmaschine oder dem Gasmotor oder stellt er einen neuen von beiden verschiedenen Typus dar? Mit Bezug hierauf kann man an die Möglichkeit denken, daß chemische Energie in elektrische und diese erst in mechanische verwandelt wird oder endlich an eine unmittelbare Verwandlung von chemischer Energie in mechanische. Eine solche findet allerdings in der unorganischen Natur, soweit unsere Erfahrung reicht, nicht statt; es könnte aber die charakteristische Eigenschaft der organisirten Materie eben darin gefunden werden, daß sie eine direkte Erzeugung von mechanischer Arbeit aus chemischer Energie gestattet. In der That entsprechen die für die Erscheinungen der Muskelkontraktion aufgestellten Theorieen den im Vorhergehenden enthaltenen Möglichkeiten, wenn auch ohne sie zu erschöpfen. Nach Engelmann's Quellungstheorie ist der Muskel ein Analogon der Dampfmaschine. Die Theorie Müllers schaltet zwischen chemische Energie und mechanische Arbeit als Zwischenglieder Wärmeenergie, und elektrische Energie ein. Nach Fick würde der Muskel einen von unseren Maschinen wesentlich verschiedenen Mechanismus darstellen mit direkter Verwandlung von chemischer in mechanische Energie.

In einem Aufsatze, welchen ich vor einem Jahre der K. G. vorgelegt habe, wurde der Versuch gemacht, die Theorie der Muskelkontraktion von einem allgemeineren Standpunkte aus zu behandeln. Der Muskel wird in demselben als ein thermodynamisches System betrachtet, d. h. es wird vorausgesetzt, daß, welches immer seine Struktur sein mag, seine physikalischen Erscheinungen den allgemeinen Gesetzen der Mechanik und der mechanischen Wärmetheorie unterworfen sind. Dieses thermodynamische System wird dann so zu bestimmen sein, daß es die Erscheinungen der Muskelkontraktion in möglichst einfacher Weise darstellt. Nun kann man thermodynamische Systeme zunächst eintheilen nach ihrer Stufe, d. h. nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen Parameter, welche zu dem Aufbau der Energie beitragen, der

Zahl der verschiedenen Erscheinungen, welche durch das Princip der Energie mit einander verbunden sind. Ist es ferner möglich, die Energie des Systems nach einem ihrer Parameter in eine Potenzreihe zu entwickeln, so wird seine Ordnung mit Bezug auf jenen durch die höchste in der Entwickelung auftretende Potenz bestimmt. Bezeichnen wir ein System mit 2 von einander unabhängigen Parametern als eines von der ersten Stufe, so ist das früher für den Muskel angenommene eines von der dritten. Von den Parametern sind zwei, Spannung und Temperatur, durch die Verhältnisse unmittelbar gegeben. Die Natur der beiden anderen habe ich unbestimmt gelassen; ich habe nur die Voraussetzung gemacht, daß das System mit Bezug auf den einen, die tonische Kraft, von der dritten, mit Bezug auf den anderen, den Quellungsdruck, von der zweiten Ordnung sei. Ich bin zu diesem Ansatz ursprünglich durch Müllers Theorie geführt worden, indem ich sie von speciellen, wahrscheinlich unhaltbaren Voraussetzungen befreite. Man kann jenen Ansatz aber auch zu den Theorieen von Fick und Engelmann in Beziehung setzen. Was ich als tonische Kraft bezeichnet habe kann identisch sein mit jener ponderomotorischen Wirkung, die Fick unmittelbar aus der chemischen Anziehung hervorgehen läßt. Wenn man den von mir eingeführten Quellungsgrad und Quellungsdruck wörtlich in diesem Sinne versteht, so kommt man zu der Theorie Engelmanns. Mit Bezug hierauf ist aber noch zweierlei zu bemerken. Ich habe im Verlauf meiner früheren Arbeit darauf hingewiesen, daß für die ursprünglich als Quellungsdruck eingeführte Größe auch eine andere Interpretation sich darbietet. Sie kann als der osmotische Druck der in Lösung befindlichen Moleküle gedeutet werden; thut man dieß, so gelangt man zu einer neuen Theorie, in welcher als Analogon des Muskels der Gasmotor erscheinen würde. Der chemische Proceß würde eine Steigerung von osmotischem Druck und Temperatur erzeugen, und bei sinkender Temperatur würde auf Kosten des Druckes Arbeit geleistet. Was zweitens die Theorie von Engelmann anbelangt, so sind zu einer vollständigeren Darstellung derselben die früher aufgestellten Gleichungen unzureichend. Wenn es sich um Quellung in irgend einem Systeme handelt, so muß dieses aus zwei Theilen bestehen, der quellungsfähigen Substanz und dem Mittel, aus dem die absorbirte Flüssigkeit stammt. Eine vollständige Theorie der Erscheinungen, insbesondere der sie begleitenden Wärmewirkungen, kann nur durch eine gesonderte Betrachtung jener beiden Theile begründet werden. In diesem Sinne bilden die nachfolgenden Untersuchungen eine Er-

gänzung der früheren. Die Theorie von Engelmann besitzt aber, ganz losgelößt aus ihrem biophysischen Zusammenhang, ein eigenthümliches Interesse. Sie ist verhältnißmäßig einfach; der Muskel ist nach ihr ein System der zweiten Stufe; sie nimmt ihre Zuflucht nicht zu neuen und unbekannten Kräften, sondern stützt sich auf bekannte physikalische Vorgänge. Sie ist in der That nur eine specielle Anwendung der allgemeinen Theorie eines anisotropen, quellungsfähigen Körpers, der irgend welchen äußeren Kräften unterworfen ist. Diese Theorie nun ist es, mit welcher die folgenden Untersuchungen sich beschäftigen; ihr Charakter ist daher ein allgemeiner; es kann aber durch Specialisirung der Verhältnisse in jedem Augenblick die Anwendung auf das Engelmannsche Muskelmodell gemacht werden.

Der erste Abschnitt enthält die Theorie der Quellung eines isotropen Körpers bei allseitig gleichem Druck. Im zweiten wird die Theorie des thermodynamischen Potentiales bei der Quellung eines beliebig deformirten Körpers entwickelt. Der dritte enthält die allgemeinen Beziehungen, welche für die Quellung eines elastischen Körpers bei homogener Deformation gelten. Der vierte Abschnitt bringt die Einführung einer specielleren Form des elastischen Potentiales unter der Voraussetzung der Anisotropie. Der fünfte behandelt die bei Zustandsänderungen des Systems ein- oder austretenden Wärmemengen; der sechste endlich die mit dem Edelmannschen Muskelmodell auszuführenden Kreisprocesse. Ueber den allgemeinen Charakter der Theorie ist noch folgendes zu bemerken. Sie stützt sich in ihrem einen Theile nur auf die allgemeinen Principien der mechanischen Wärmetheorie und führt in diesen zu Resultaten, denen eine allgemeine Gültigkeit zukommen muß. Sie benutzt aber andererseits eine specielle Form des elastischen Potentiales, von der vorauszusehen ist, daß sie bei den der Beobachtung unterworfenen Körpern höchstens eine erste Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. So lange die wahre Natur der in Frage kommenden Funktionen unbekannt ist, kann eine genaue Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nicht erwartet werden. Aber selbst wenn alle Voraussetzungen für die Entwickelung einer strengen Theorie erfüllt wären, würde der Standpunkt des Physikers den Erscheinungen der Quellung und Muskelkontraktion gegenüber etwa der sein, den der Elektrotechniker einer Dynamomaschine gegenüber einnimmt. Die physikalischen Voraussetzungen für die Entwicklung einer strengen Theorie sind gegeben, aber die mathematischen Hülfsmittel versagen. Resultate, deren Entwickelung Sache der Theorie wäre, werden aus

Beobachtungen abgeleitet, und aus ihrer Verbindung mit allgemeinen physikalischen Sätzen entsteht ein Bau, der zwar des einheitlichen Fundamentes entbehrt, der aber den Bedürfnissen der Praxis genügt.

I. Quellung eines Körpers in einem von Dampf erfüllten Raume.

Der quellungsfähige Körper befinde sich in einem Cylinder, welcher durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen ist. Der freie Raum des Cylinders sei erfüllt von Wasserdampf in nicht gesättigtem Zustande. Das Volumen des freien Raumes sei v_1, der Druck des Wasserdampfes p, die Temperatur T; das Volumen des quellenden Körpers v_2, die Masse der quellenden Substanz M, die Masse des absorbirten Wasser m_2. Wir haben ein aus zwei Phasen bestehendes System vor uns; die eine wird gebildet von dem Wasserdampf, die andere von dem quellenden Körper; beide Phasen haben nur das Wasser als gemeinsame Componente. Die Energie der gasförmigen Phase ist eine homogene lineare Funktion von m_1, v_1, η_1, wenn wir durch η_1 ihre Entropie bezeichnen; die Energie der festen Phase eine homogene lineare Funktion von M, m_2, v_2, η_2.

Die Energie des Wasserdampfes läßt sich darstellen in der Form

$$1)\qquad E_1 = \frac{m_1^k}{(k-1)\,v_1^{k-1}} e^{\eta_1/m_1 c_v}$$

wo $k = c_p/c_v$ das Verhältniß der specifischen Wärmen. Man erhält dann die weiteren Gleichungen:

$$2)\qquad RT = \left(\frac{m_1}{v_1}\right)^{k-1} e^{\eta_1/m_1 c_v}; \qquad \eta_1 = m_1 c_v \log\left\{p\cdot\left(\frac{v_1}{m_1}\right)^k\right\}.$$

Für das Potential μ_1 ergiebt sich aus der Gleichung $\mu_1 = \frac{\partial E_1}{\partial m_1}$:

$$3)\qquad \begin{aligned} \mu_1 &= \mathfrak{A}T\{c_p - \eta_1/m_1\} \\ &= \mathfrak{A}T\{c_p - (c_p - c_v)\log v_1/m_1 - c_v \log RT\} \\ &= \mathfrak{A}T\{c_p + (c_p - c_v)\log p - c_p \log RT\} \\ &= \mathfrak{A}T\{c_p - c_p \log v_1/m_1 - c_v \log p\} \end{aligned}$$

woran sich noch die weiteren Gleichungen schließen

$$4)\qquad \eta_1/m_1 = -(c_p - c_v)\log p + c_p \log RT$$

und

$$4')\qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial T} = -\mathfrak{A}\eta_1/m_1.$$

Bei dem quellenden Körper gilt für den Zuwachs der Energie die Gleichung

$$5) \qquad dE_2 = \mathfrak{A}Td\eta_2 - pdv_2 + \mu_2 dm_2 + \mathsf{M}dM$$

wo M das Potential der festen quellungsfähigen Substanz bezeichnet; wir erhalten somit die 4 Gleichungen

$$5') \qquad \mathfrak{A}T = \frac{\partial E_2}{\partial \eta_2}, \quad -p = \frac{\partial E_2}{\partial v_2}, \quad \mu_2 = \frac{\partial E_2}{\partial m_2}, \quad \mathsf{M} = \frac{\partial E_2}{\partial M}$$

durch welche Temperatur, Druck und Potentiale als homogene Funktionen nullter Ordnung in den Veränderlichen μ_2, v_2, m_2 und M dargestellt werden. Zu ihnen kommt noch hinzu die Bedingung, daß das Potential des dampfförmigen Wassers gleich sein soll dem Potential des absorbirten. Dieses letztere ergiebt sich zunächst in der Form

$$\mu_2 = \frac{\partial E_2}{\partial m_2} = f(\eta_2/M, \ v_2/M, \ m_2/M.)$$

Wir können mit Hülfe der Gleichungen (5') η_2/M und v_2/M ausdrücken durch p, T und m_2/M und erhalten dann

$$\mu_2 = \varphi(p, \ T, \ m_2/M).$$

Die Gleichsetzung der Potentiale giebt dann:

$$\varphi(p, \ T, \ m_2/M) = \mathfrak{A}T\{c_p + (c_p - c_v)\log p - c_p \log RT\}$$

eine Gleichung aus welcher m_2/M als Funktion von p und T berechnet werden kann. Wir haben somit den Satz:

Der Quellungsgrad (m_2/M) eines in nicht gesättigtem Wasserdampf befindlichen Körpers ist eine Funktion des Druckes und der Temperatur.

Experimentelle Prüfung.

Um für den vorstehenden Satz eine experimentelle Prüfung zu gewinnen, habe ich das Gewicht einer quellungsfähigen Substanz, einer Alge (chondrus crispus), während einer Reihe von Tagen bestimmt und gleichzeitig Temperatur und relative Feuchtigkeit der Luft beobachtet.

Aus vier Gruppen von Versuchen, von welchen die beiden ersten je 12, die beiden letzten je 20 einzelne Beobachtungen umfassen, und welche sich auf zwei verschiedene Proben der Substanz beziehen, konnten die folgenden Interpolationsformeln abgeleitet werden:

$$
7)\quad \begin{aligned}
m_2/M &= 0{,}0255\,p - 0{,}000606\,p^2 - 0{,}000353\,pt \\
m_2/M &= 0{,}0400\,p - 0{,}000293\,p^2 - 0{,}000114\,pt \\
m_2/M &= 0{,}0227\,p - 0{,}000673\,p^2 - 0{,}000162\,pt \\
m_2/M &= 0{,}0220\,p - 0{,}000546\,p^2 - 0{,}000208\,pt.
\end{aligned}
$$

Die beiden ersten auf die eine Substanzprobe bezüglichen Formeln stimmen mit einander kaum mehr als in der Größenordnung überein; auch finden zwischen den beobachteten und den auf Grund der vorstehenden Formeln berechneten Werthen erhebliche Abweichungen statt, wie sich aus der folgenden Zusammenstellung ergiebt

p	t	m_2/M beob.	m_2/M berech.
3.8	23.0	0.079	0.058
8.4	19.8	0.103	0.125
14.6	25.6	0.120	0.111
17.6	23.7	0.153	0.146
3.8	23.0	0.086	0.062
6.4	25.7	0.093	0.091
12.0	17.7	0.145	0.141
17.6	23.0	0.150	0.132.

Die mangelhafte Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen dürfte ihren Grund zum Theil darin finden, daß die Substanz dem Wechsel der Temperatur und Feuchtigkeit nicht sofort folgt, zum Theil darin, daß die benutzte Interpolationsformel unzureichend ist.

Die vier ersten Reihen beziehen sich auf die erste, die vier letzten auf die zweite Substanzprobe; die zur Vergleichung der Beobachtung und Rechnung herausgegriffenen Werthe sind die nach den Werthen des Druckes oder der Temperatur extremen, so daß die Tabelle gleichzeitig eine Anschauung von den Intervallen der Zustandsgrößen gewährt, über welche die Beobachtungen sich erstreckten. Aus denselben ergeben sich die beiden Sätze:

Bei konstanter Temperatur wächst der Quellungsgrad mit dem Druck erst schneller, dann langsamer. Bei konstantem Druck sinkt der Quellungsgrad mit steigender Temperatur.

Das Potential der quellenden Substanz und die Quellungswärme.

Aus der Natur der homogenen Funktionen folgt die Beziehung

$$
8)\quad E_2 = \frac{\partial E_2}{\partial \eta_2}\,\eta_2 + \frac{\partial E_2}{\partial v_2}\,v_2 + \frac{\partial E_2}{\partial m_2}\,m_2 + \frac{\partial E_2}{\partial M}\,M
$$

oder

8′) $$E_2 = \mathfrak{A} T \eta_2 - p v_2 + \mu_2 m_2 + \mathsf{M} M$$

und hieraus in Verbindung mit der für den Zuwachs der Energie geltenden Gleichung

9) $$0 = \mathfrak{A} \eta_2 \, dT - v_2 \, dp + m_2 \, d\mu_2 + M d\mathsf{M}.$$

Ebenso ergiebt sich für die dampfförmige Phase

9′) $$0 = \mathfrak{A} \eta_1 \, dT - v_1 \, dp + m_1 \, d\mu_1$$

und durch Elimination von $d\mu_1 = d\mu_2$

10) $$\mathfrak{A}\left(\frac{\eta_1}{m_1} - \frac{\eta_2}{m_2}\right)\frac{m_2}{M}\, dT - \left(\frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2}{m_2}\right)\frac{m_2}{M}\, dp = d\mathsf{M}.$$

Bezeichnen wir mit Q die Wärmemenge, welche nothwendig ist, um 1 g Wasser bei der Temperatur T aus der Phase 2 überzuführen in die Phase 1, d. h. aus dem quellenden Körper zu verdampfen, so ist

10′) $$\frac{\eta_1}{m_1} - \frac{\eta_2}{m_2} = \frac{Q}{T}$$

Vernachlässigen wir außerdem das specifische Volumen des Quellungswassers gegenüber dem des Wasserdampfes, so ergiebt sich:

11) $$\mathfrak{A}\frac{Q}{T}\frac{m_2}{M}\, dT - \frac{v_1}{m_1}\cdot\frac{m_2}{M}\, dp = d\mathsf{M}.$$

Somit ergiebt sich weiter:

12) $$\mathfrak{A}\frac{Q}{T}\frac{m_2}{M} = \frac{\partial \mathsf{M}}{\partial T} \text{ und } \frac{v_1}{m_1}\cdot\frac{m_2}{M} = -\frac{\partial \mathsf{M}}{\partial p}$$

12′) $$\frac{\mathfrak{A}}{T}\frac{\partial}{\partial p}\left(Q\frac{m_2}{M}\right) = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{v_1}{m_1}\cdot\frac{m_2}{M}\right)$$

und hieraus

13) $$Q + \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\frac{m_2}{M}}{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{m_2}{M}\right)} = -\frac{R}{\mathfrak{A}}\, T\, \frac{T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{m_2}{M}\right) + \frac{m_2}{M}}{p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{m_2}{M}\right)}.$$

Setzt man für m_2/M den quadratischen Ausdruck

$$m_2/M = ap - bp^2 - cpt$$

so erhält man:

13′) $$Q + \frac{m_2/M}{m_2/M - bp^2}\, p\, \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{R}{\mathfrak{A}}\, T\, \frac{cpT - m_2/M}{m_2/M - bp^2}.$$

Näherungsweise für kleine Werthe des Druckes

14) $$Q = \frac{R}{\mathfrak{A}} T \frac{cpT - m_2/M}{m_2/M - bp^2}.$$

Wendet man die Formel auf die in der früheren Tabelle enthaltenen Beobachtungen mit kleinerem Dampfdrucke an, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung:

p	t	m_2/M	Q.
3.8	23.0	0,058	23
8.4	19.8	0,125	84
3.8	23.0	0,062	7,5
6.4	25.7	0,091	6,5

Die beiden ersten Reihen beziehen sich auf die erste, die beiden letzten auf die zweite Probe der Substanz. Zu einer quantitativen Bestimmung von Q reicht die Genauigkeit der Beobachtungen nicht aus; immerhin dürfte aus denselben zu schließen sein, daß bei der Quellung Wärme entbunden wird.

II. Der Satz vom thermodynamischen Potential bei der Quellung eines beliebig deformirten elastischen Körpers.

Wir denken uns den Körper im Inneren eines durch einen beweglichen Stempel abgeschlossenen Raumes, welcher außer dem Körper noch flüssiges Wasser oder Wasserdampf enthält; auf den Stempel wirke ein gegebener äußerer Druck p, welcher durch die Flüssigkeit hindurch gleichmäßig auf den elastischen Körper fortgepflanzt wird. Auf diesen wirken außerdem gegebene äußere Drucke. Als Normalzustand betrachten wir den Zustand des Körpers, bei welchem keine Kräfte auf ihn wirken, kein Wasser in sein Inneres aufgenommen, seine Temperatur gleich einer willkürlich festzusetzenden Normaltemperatur ist. Wir beziehen die Punkte des Körpers auf ein festes Coordinatensystem und bezeichnen die Coordinaten im Normalzustand durch x, y, z. Im deformirten Zustand seien sie $x + u = x'$, $y + v = y'$, $z + w = z'$, wo u, v, w als gegebene Funktionen von x, y, z zu betrachten sind. Ein Volumelement $dx\, dy\, dz$, welches wir im normalen Zustande im Inneren des Körpers abgrenzen, erleidet durch die äußeren Einwirkungen Aenderungen der Kantenlängen und der Winkel, welche, gegeben durch die Ausdrücke

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

gleichfalls Funktionen von x, y, z sind. Die Dilatationen können wir als Folge normaler Druckkomponenten X_x, Y_y, Z_z, die Drehungen als Folge tangentialer Componenten Y_z, Z_x, X_y betrachten. Fügen wir dem bestehenden System von Verschiebungen noch kleine virtuelle Verrückungen δu, δv, δw hinzu und bezeichnen wir durch $\delta x_x \ldots \delta x_y$ die entsprechenden Aenderungen der Deformationsgrößen, so ist die Arbeit, welche bei dieser virtuellen Verrückung an dem Element $dx\,dy\,dz$ geleistet wird gleich

$$(X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y)\, dx\,dy\,dz.$$

Die Energie eines Elementes im deformirten Zustande bezeichnen wir durch $D\varepsilon'$, seine Entropie durch $D\eta'$, die Menge des in ihm enthaltenen Wassers durch Dm_2', die Temperatur durch T, das Potential des absorbirten Wassers durch μ_2'. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$\delta D\varepsilon' = \mathfrak{A} T \delta D\eta' - (X_x \delta x_x + \cdots + X_y \delta x_y)\, dx\,dy\,dz + \mu_2' \delta Dm_2'$$

und durch Integration über alle Elemente des Körpers

$$\delta \int D\varepsilon' = \mathfrak{A} T \delta \int D\eta' - \int (X_x \delta x_x + \cdot\cdot + X_y \delta x_y)\, dx\,dy\,dz + \int \mu_2' \delta Dm_2'.$$

Nun ist

$$\int (X_x \delta x_x + \cdot + X_y \delta x_y)\, dx\,dy\,dz =$$

$$\int \{(X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma)\, \delta u + (Y_x \alpha + Y_y \beta + Y_z \gamma)\, \delta v + (Z_x \alpha + Z_y \beta + Z_z \gamma)\, \delta w\}\, dS$$

$$- \int \Big\{ \Big(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \Big) \delta u + \Big(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \Big) \delta v + \Big(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \Big) \delta w \Big\}\, dx\,dy\,dz$$

wenn wir durch dS ein Element der Oberfläche, durch α, β, γ die Richtungskosinusse der äußeren Normale bezeichnen.

Wenn der Körper im Gleichgewicht ist, so sind die Summen $\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$, .. gleich Null. Wirkt ferner auf seine Oberfläche der gleichmäßige Druck p der umgebenden Flüssigkeit, so liefert dieser für ein Element Ds die Kraftkomponenten $-p\alpha Ds$, $-p\beta Ds$, $-p\gamma Ds$. Dazu kommen noch die gegebenen äußeren Kräfte, deren Componenten durch $\overline{\Xi} Ds$, $\overline{H} Ds$, $\overline{Z} dS$ bezeichnet werden mögen. Gleichgewicht an der Oberfläche des Körpers ist vorhanden, wenn:

$$X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma + \overline{\Xi} - p\alpha = 0$$
$$Y_x \alpha + Y_y \beta + Y_z \gamma + \overline{H} - p\beta = 0$$
$$Z_x \alpha + Z_y \beta + Z_z \gamma + \overline{Z} - p\gamma = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen kann die Gleichung der Energie auf folgende Form gebracht werden:

$$\delta \int D\varepsilon' = \mathfrak{A}\, T\delta \int D\eta' + S\left\{(\overline{\Xi} - p\alpha)\,\delta u + (\overline{H} - p\beta)\,\delta v + (\overline{Z} - p\gamma)\,\delta w\right\} Ds$$
$$+ \int \mu_2'\, \delta\, Dm_2'.$$

Nun ist $\int(\alpha\,\delta u + \beta\,\delta v + \gamma\,\delta w)\; Ds$ nichts anderes, als die Zunahme, welche das Volumen des Körpers in Folge der Verrückungen δu, δv, δw erfährt, wir bezeichnen diese durch δv_2 und erhalten:

$$\delta \int D\varepsilon' = \mathfrak{A} T\delta \int D\eta' + S(\overline{\Xi}\,\delta u + \overline{H}\,\delta v + \overline{Z}\,\delta w)\, Ds - p\,\delta v_2 + \int \mu_2'\, \delta\,(Dm_2').$$

Bezeichnen wir durch ε_1 die Energie der Flüssigkeit, durch η_1 ihre Entropie, durch μ_1 ihr Potential und durch m_1 ihre ganze Masse so ist:

$$\delta\varepsilon_1 = \mathfrak{A} T\delta\eta_1 - p\delta v_1 + \mu_1\,\delta m_1.$$

Die Addition beider Gleichungen giebt:

$$\delta\left(\int D\varepsilon' + \varepsilon_1\right) = \mathfrak{A} T\delta\left(\int D\eta' + \eta_1\right) - p\delta(v_1 + v_2)$$
$$+ S(\overline{\Xi}\,\delta u + \overline{H}\,\delta v + \overline{Z}\,\delta w)\, Ds$$
$$+ \int \mu_2'\, \delta\,(Dm_2') + \mu_1\, \delta m_1.$$

Wir haben dann auf der linken Seite den ganzen Zuwachs, welchen die Energie des betrachteten Systems erleidet, auf der rechten die ganze zugeführte Wärme, die gegen den Druck des verschließenden Stempels geleistete und die von den äußeren Kräften an dem elastischen Körper verrichtete Arbeit. Da aber hierdurch der Zuwachs der Energie erschöpft sein muß, so erhält man:

$$\int \mu_2'\, \delta\,(Dm_2) + \mu_1\, \delta m_1 = 0.$$

Hierzu kommt noch die Bedingung

$$\int \delta\,(Dm_2') + \delta m_1 = 0.$$

Es ergiebt sich somit

$$\mu_2' = \mu_1.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht ist also, daß das Potential des Wassers in allen Theilen des festen Körpers denselben Werth hat wie in der ihn umgebenden Flüssigkeit.

III. Quellung eines elastischen Körpers bei homogener Deformation; allgemeine Beziehungen.

Der Zustand des Körpers werde durch die folgenden Größen bestimmt:

m die Masse der elastischen Substanz,

m_2 die Masse des absorbirten Wassers,

η die Entropie,

Ξ_x, H_y, Z_z, H_z, Z_x, Ξ_y, die elastischen Drucke.

T, die absolute Temperatur, beziehungsweise den Temperaturüberschuß $\vartheta = T - T_0$ über eine willkürlich gewählte Normaltemperatur T_0.

ω_0 das specifische Volumen der quellenden Substanz im Normalzustand, d. h. undeformirt und trocken.

Die Deformationsgrößen seien x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y; der Quellungsgrad $\zeta = m_1/m$.

Für den Zuwachs der Energie gilt die Gleichung:

15) $$d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - m\omega_0 \{\Xi_x dx_x + \cdots + \Xi_y dx_y\} + \mu dm + \mu_1 dm_1.$$

Die Funktionen μ und μ_1, mit welchen die Zuwüchse dm und dm_1 multiplicirt erscheinen sind die Potentiale der elastischen Substanz und des absorbirten Wassers. Wir führen nun eine neue Funktion u ein, durch den Ansatz:

16) $$u = \varepsilon + m\omega_0 \{\Xi\, x_x + \cdots + \Xi_y x_y\}.$$

Es wird dann:

17) $$du = \mathfrak{A} T d\eta + m\omega_0 \{x_x d\Xi_x + \cdots + x_y d\Xi_y\} + \mu\, dm + \mu_1 dm_1$$

und

17') $$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathfrak{A} T, \quad \frac{\partial u}{\partial \Xi_x} = m\omega_0 x_x, \quad \ldots \frac{\partial u}{\partial \Xi_y} = m\omega_0 x_y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial m} = \mu, \quad \frac{\partial u}{\partial m_1} = \mu_1.$$

Nun ist ε linear in η, m und m_1; dasselbe gilt daher von u und man hat somit:

18) $$u = \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial u}{\partial m} m + \frac{\partial u}{\partial m_1} m_1$$
$$= \mathfrak{A} T \eta + m\mu + m_1 \mu_1$$

Hieraus folgt weiter

$$19)\qquad du = \mathfrak{A}T d\eta + \mathfrak{A}\eta dT + \mu dm + m d\mu + \mu_1 dm_1 + m_1 d\mu_1$$

und in Verbindung mit Gleichung 17

$$20)\qquad \mathfrak{A}\eta dT - m\omega_0 \{x_x d\Xi_x + .. + x_y d\Xi_y\} + m d\mu + m_1 d\mu_1 = 0.$$

Die Potentiale μ und μ_1 können nur abhängig sein von T, beziehungsweise ϑ, $\Xi_x \dots \Xi_y$, und $m_1/m = \zeta$. Somit ergeben sich die Gleichungen:

$$21)\qquad \begin{aligned} m\frac{\partial\mu}{\partial T} + m_1 \frac{\partial\mu_1}{\partial T} &= -\mathfrak{A}\eta \\ m\frac{\partial\mu}{\partial\Xi_x} + m_1 \frac{\partial\mu_1}{\partial\Xi_x} &= m\omega_0 x_x \\ m\frac{\partial\mu}{\partial\Xi_y} + m_1 \frac{\partial\mu_1}{\partial\Xi_y} &= m\omega_0 x_y \\ m\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} + m_1 \frac{\partial\mu_1}{\partial\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch μ_1' das Potential des den elastischen Körper umgebenden Wassers oder Wasserdampfes, so gilt die Bedingung:

$$22)\qquad \mu_1(T, \Xi_x \dots \Xi_y, \zeta) = \mu_1'(p, T)$$

aus welcher ζ als Funktion von T, p, $\Xi_x \dots \Xi_y$ berechnet werden kann. Für die flüssige oder dampfförmige Phase des Wassers ist ferner

$$23)\qquad \mathfrak{A}\eta' dT - v' dp + m_1' d\mu_1' = 0.$$

Dividiren wir sie durch m_1', die Gleichung (20) durch m_1, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$24)\qquad \mathfrak{A}\left(\frac{\eta'}{m_1'} - \frac{\eta}{m_1}\right) dT - \omega' dp + \frac{\omega_0}{\zeta}\{x_x d\Xi_x + \cdot\cdot + x_y d\Xi_y\} = \frac{d\mu}{\zeta}.$$

Hier bezeichnet ω' das specifische Volumen der flüssigen oder dampfförmigen Phase. Die Differenz $\eta'/m_1' - \eta/m_1$ multipliciert mit T giebt die Wärme, welche nothwendig ist, um 1 gr. absorbirten Wassers in die flüssige oder dampfförmige Phase überzuführen. Setzen wir diese gleich Q, so ist:

$$25)\qquad d\mu = \frac{\mathfrak{A}Q}{T}\zeta dT - \omega' \zeta dp + \omega_0\{x_x d\Xi_x + \cdot\cdot + x_y^2 d\Xi_y\}.$$

Die normalen Druckkomponenten Ξ_x, H_y, Z_z werden zum Theil durch den Druck p der den Körper umgebenden Flüssigkeit veranlaßt. Wir setzen mit Rücksicht hierauf

26)
$$\begin{gathered} \Xi_x = A_x + p, \qquad H_y = B_y + p, \qquad Z_z = \Gamma_z + p \\ H_z = B_z, \qquad Z_x = \Gamma_x, \qquad \Xi_y = A_y \end{gathered}$$

und erhalten dann

27)
$$\begin{aligned} d\mu = \frac{\mathfrak{A}Q}{T}\zeta dT - \{\omega'\zeta - \omega_0(x_x + y_y + z_z)\}dp \\ + \omega_0\{x_y dA_x + \cdot\cdot + x_y dA_y\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die weiteren Gleichungen

28)
$$\begin{gathered} \frac{\partial\mu}{\partial T} = \frac{\mathfrak{A}Q}{T}\zeta, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial p} = -\omega'\zeta + \omega_x(x_x + y_y + z_z) \\ \frac{\partial\mu}{\partial A_x} = \omega_0 x_x \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad \frac{\partial\mu}{\partial A_y} = \omega_0 x_y \end{gathered}$$

und die reciproken Beziehungen:

29)
$$\begin{gathered} \frac{\mathfrak{A}}{T}\frac{\partial Q\zeta}{\partial p} = -\frac{\partial(\omega'\zeta)}{\partial T} + \omega_0\frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial T} \\ \frac{\mathfrak{A}}{T}\frac{\partial Q\zeta}{\partial A_x} = \omega_0\frac{\partial x_x}{\partial T} \cdot\cdot\cdot \frac{\mathfrak{A}}{T}\frac{\partial Q\zeta}{\partial A_y} = \omega_0\frac{\partial x_y}{\partial T} \\ -\omega'\frac{\partial\zeta}{\partial A_x} + \omega_0\frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial A_x} = \omega_0\frac{\partial x_x}{\partial p} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ -\omega'\frac{\partial\zeta}{\partial A_y} + \omega_0\frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial A_y} = \omega_0\frac{\partial x_y}{\partial p} \end{gathered}$$

IV. Einführung des elastischen Potentiales.

Wir verallgemeinern den gewöhnlichen Ansatz des elastischen Potentiales in doppelter Hinsicht. Einmal nehmen wir an, daß der elastische Körper, auf welchen die Untersuchung sich bezieht, nicht isotrop sei, sondern in der z-Axe eine ausgezeichnete Richtung besitze. Zweitens berücksichtigen wir Glieder der dritten Ordnung in der Entwickelung des elastischen Potentiales. Setzen wir voraus, daß die tangentialen Druckkomponenten verschwinden, so können wir,

einen von Voigt[1]) gemachten Ansatz erweiternd, das elastische Potential auf die Form bringen:

$$\tfrac{1}{2} s_{11}(\Xi_x^2 + H_y^2) + \tfrac{1}{2} s_{33} Z_z^2 + s_{12}\Xi_x H_y + s_{13}(\Xi_x + H_y) Z_z + \tfrac{1}{3}\varDelta^3 + \tfrac{1}{2}\varDelta\varPsi$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varDelta = s'_{11}(\Xi_x^2 + H_y) + s'_{13} Z_z;\quad \varPsi = s'_{22}(\Xi_x^2 + H_y^2) + s'_{23} Z_z^2.$$

Wir setzen nun

$$30)\quad \begin{aligned} u &= \mathfrak{A} T \eta \\ &- m\omega_0 \left\{ \begin{matrix} \tfrac{1}{2} s_{11}(\Xi_x^2 + H_y^2) + \tfrac{1}{2} s_{33} Z_z^2 + s_{12}\Xi_x H_y \\ + s_{13}(\Xi_x + H_y) Z_z + \tfrac{1}{3}\varDelta^3 + \tfrac{1}{2}\varDelta\varPsi \end{matrix} \right\} \\ &+ m\omega_0 \left\{ q_1(\Xi_x + H_y) + q_3 Z_z \right\} \vartheta \\ &+ m\omega_0 \left\{ r_1(\Xi_x + H_y) + r_3 Z_z \right\} \xi \\ &- \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2 m + m_1(\mathfrak{U} + \vartheta\mathfrak{W}). \end{aligned}$$

Wo s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{33}, q_1, q_3, r_1, r_3 und c, ebenso $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ Funktionen des Quellungsgrades ξ sein sollen.

Die Gleichung (17) giebt

$$31)\quad d(u - \mathfrak{A}T\eta) = -\mathfrak{A}\eta\, d\vartheta + m\omega_0\left\{x_x d\Xi_x + y_y dH_y + z_z dZ_z\right\} + \mu\, dm + \mu_1\, dm_1.$$

und:

$$31')\quad \frac{\partial(u - \mathfrak{A}T\eta)}{\partial\vartheta} = -\mathfrak{A}\eta.$$

Mit Benutzung von (30) erhalten wir:

$$32)\quad -\mathfrak{A}\eta = m\omega_0\left\{q_1(\Xi_x + H_y) + q_3 Z_z\right\} - \frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta m + \mathfrak{W} m_1$$

$$32')\quad \frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta = \mathfrak{A}\eta/m + \omega_0\left\{q_1(\Xi_x + H_y) + q_3 Z_z\right\} + \mathfrak{W}\xi.$$

Ein einfacherer Ausdruck für u ergiebt sich wenn wir $T = T_c + \vartheta$ und für $\mathfrak{A}\eta\vartheta$ den aus Gleichung (32) folgenden Werth setzen:

$$33)\quad \begin{aligned} u &= \mathfrak{A} T_0 \eta - m\omega_0 \left\{ \begin{matrix} \tfrac{1}{2} s_{11}(\Xi_x^2 + H_g^2) + \tfrac{1}{2} s_{33} Z_z^2 + s_{12}\Xi_x H_y \\ + s_{13}(\Xi_x + H_y) Z_z + \tfrac{1}{3}\varDelta^3 + \tfrac{1}{2}\varDelta\varPsi \end{matrix} \right\} \\ &+ m\omega_0\left\{r_1(\Xi_x + H_y) + r_3 Z_z\right\}\xi + \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}c}{T_c}\vartheta^2 m + \mathfrak{U} m_1. \end{aligned}$$

---

1) Voigt, Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie. Gött. Nachr. 1893. p. 536.

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathfrak{A}T_0 + \frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}m = \mathfrak{A}T$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Xi_x} = -m\omega_0\left\{\begin{matrix} s_{11}\Xi_x + s_{12}H_y + s_{13}Z_z \\ + s'_{11}\Delta^2 + s'_{22}\Delta\Xi_x + \frac{1}{2}s'_{11}\Psi\end{matrix}\right\}$$

$$+ m\omega_0 r_1\zeta + \frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\Xi_x}m$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (17′) und (32′)

34) $$x_x = -\left\{\begin{matrix} s_{11}\Xi_x + s_{12}H_y + s_{13}Z_z \\ + s'_{11}\Delta^2 + s'_{22}\Delta\Xi_x + \frac{1}{2}s'_{11}\Psi\end{matrix}\right\} + r_1\zeta + q_1\vartheta$$

analoge Ausdrücke für y_y und z_z.

Ferner wird:

$$\frac{\partial u}{\partial m} = \mu = \frac{\delta u}{\delta m} + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial m} = \frac{\delta u}{\delta m} - \frac{\delta u}{\delta\zeta}\cdot\frac{\zeta}{m}$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß ϑ die Masse m explicite und außerdem auch ζ enthält; es ergiebt sich:

35) $$\mu = -\omega_0\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\left(s_{11} - \frac{\partial s_{11}}{\partial\zeta}\zeta\right)(\Xi_x^2 + H_y^2) + \frac{1}{2}\left(s_{33} - \frac{\partial s_{33}}{\partial\zeta}\zeta\right)Z_z^2 \\ + \left(s_{12} - \frac{\partial s_{12}}{\partial\zeta}\zeta\right)\Xi_x H_y + \left(s_{13} - \frac{\partial s_{13}}{\partial\zeta}\zeta\right)(\Xi_x + H_y)Z_z \\ + \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{2}\Delta\Psi\end{matrix}\right\}$$

$$-\omega_0\left\{\frac{\partial r_1}{\partial\zeta}(\Xi_x + H_y) + \frac{\partial r_3}{\partial\zeta}Z_z\right\}\zeta^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2 - \mathfrak{A}\frac{\eta}{m}\vartheta - \frac{1}{2}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2\right) - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial\zeta}\zeta^2.$$

Ebenso

35′) $$\mu_1 = -\omega_0\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial s_{11}}{\partial\zeta}(\Xi_x^2 + H_y^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial s_{33}}{\partial\zeta}\cdot Z_z^2 + \frac{\partial s_{12}}{\partial\zeta}\Xi_x H_y + \frac{\partial s_{13}}{\partial\zeta}(\Xi_x + H_z)Z_z\right\}$$

$$+\omega_0\left\{\left(r_1 + \frac{\partial r_1}{\partial\zeta}\zeta\right)(\Xi_x + H_y) + \left(r_3 + \frac{\partial r_3}{\partial\zeta}\zeta\right)Z_z\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2\right) + \mathfrak{U} + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial\zeta}\zeta.$$

Die Gleichung (18) giebt:

$$\mu + \zeta\mu_1 = \frac{1}{m}(u - \mathfrak{A}T\eta).$$

Die Gleichungen (35) und (35'):

$$\mu + \xi\mu_1 = -\omega_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} s_{11} (\Xi_x^2 + H_y^2) + \frac{1}{2} s_{33} Z_z^2 \\ + s_{12} \Xi_x H_y + s_{13} (\Xi_x + H_y) Z_z \\ + \frac{1}{3} \Delta^3 + \frac{1}{2} \Delta \Psi \end{array} \right\}$$
$$+ \omega_0 \{ r_1 (\Xi_x + H_y) + r_3 Z_z \} \xi$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{A} c}{T_0} \vartheta^2 - \mathfrak{A} \frac{\eta}{m} \vartheta + \mathfrak{U} \xi$$

und mit Rücksicht auf (32)

$$\begin{aligned} \mu + \xi\mu_1 = & -\omega_0 \{ \tfrac{1}{2} s_{11} (\Xi_x^2 + H_y^2) + \cdots + \tfrac{1}{2} \Delta \Psi \} \\ & + \omega_0 \{ q_1 (\Xi_x + H_y) + q_3 Z_z \} \vartheta \\ & + \omega_0 \{ r_1 (\Xi_x + H_y) + r_3 Z_z \} \xi \\ & - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{A} c}{T_0} \vartheta^2 + (\mathfrak{U} + \mathfrak{W} \vartheta) \xi \end{aligned} \tag{36}$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung (30).

Um die Werthe der Potentiale μ und μ_1 vollständig in den Variabeln ϑ, ξ, Ξ_x, H_y, Z_z auszudrücken, müssen wir noch den Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mathfrak{A} c}{T_0} \vartheta^2 \right)$ angeben, bei dessen Berechnung η als unabhängige Veränderliche zu betrachten ist. Wir erhalten mit Rücksicht auf Gl. (32'):

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mathfrak{A} c}{T_0} \vartheta^2 \right) = \omega_0 \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial \xi} (\Xi_x + H_y) + \frac{\partial q_3}{\partial \xi} Z_z \right\} \vartheta$$
$$+ \left(\mathfrak{W} + \xi \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \xi} \right) \vartheta - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{A}}{T_0} \frac{\partial c}{\partial \xi} \vartheta^2$$

und somit

$$\begin{aligned} \mu_1 = & -\omega_0 \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{\partial s_{11}}{\partial \xi} (\Xi_x^2 + H_y^2) + \tfrac{1}{2} \frac{\partial s_{33}}{\partial \xi} Z^2 + \frac{\partial s_{12}}{\partial \xi} \Xi_x H_y + \frac{\partial s_{13}}{\partial \xi} (\Xi_x + H_y) Z_z \right\} \\ & + \omega_0 \left\{ \left(r_1 + \frac{\partial r_1}{\partial \xi} \xi \right) (\Xi_x + H_y) + \left(r_3 + \frac{\partial r_3}{\partial \xi} \xi \right) Z_z \right\} \\ & + \omega_0 \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial \xi} (\Xi_x + H_y) + \frac{\partial q_3}{\partial \xi} Z_z \right\} \vartheta \\ & - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{A}}{T_0} \frac{\partial c}{\partial \xi} \vartheta^2 + \mathfrak{U} + \mathfrak{W} \vartheta + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \xi} \vartheta \right) \xi. \end{aligned} \tag{37}$$

Die Gleichungen (21) lassen sich ersetzen durch

$$\frac{\partial(\mu+\xi\mu_1)}{\partial\vartheta} = -\mathfrak{A}\eta/m, \quad \frac{\partial(\mu+\xi\mu_1)}{\partial\Xi_x} = \omega_0 x_x \ldots.$$

$$\frac{\partial(\mu+\xi\mu_1)}{\partial\xi} = \mu_1.$$

Mit Hülfe des für $\mu+\xi\mu_1$ gefundenen Werthes kann die Richtigkeit dieser Beziehungen leicht bestätigt werden.

Substituiren wir den für $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2\right)$ gefundenen Werth auch noch in dem Ausdrucke für das Potential μ des quellenden Körpers, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mu = -\omega_0 & \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(s_{11}-\frac{\partial s_{11}}{\partial\xi}\xi\right)(\Xi_x^2+H_y^2)+\tfrac{1}{2}\left(s_{33}-\frac{\partial s_{33}}{\partial\xi}\xi\right)Z_z^2 \\ &+\left(s_{12}-\frac{\partial s_{12}}{\partial\xi}\xi\right)\Xi_x H_y+\left(s_{13}-\frac{\partial s_{13}}{\partial\xi}\xi\right)(\Xi_x+H_y)Z_z \\ &+\tfrac{1}{3}\varDelta^3+\tfrac{1}{2}\varDelta\Psi \end{aligned}\right\} \\
& -\omega_0\left\{\frac{\partial r_1}{\partial\xi}(\Xi_x+H_y)+\frac{\partial r_3}{\partial\xi}Z_z\right\}\xi^2 \\
& +\omega_0\left\{\left(q_1-\frac{\partial q_1}{\partial\xi}\xi\right)(\Xi_x+H_y)+\left(q_3-\frac{\partial q_3}{\partial\xi}\xi\right)Z_z\right\}\vartheta \\
& -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}}{T_0}\left(c-\frac{\partial c}{\partial\xi}\xi\right)\vartheta^2-\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial\xi}+\vartheta\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\xi}\right)\xi^2.
\end{aligned} \tag{37'}$$

Endlich giebt noch die Verbindung der Gleichungen (22) und (36)

$$\begin{aligned}
\mu = & -\omega_0\left\{\tfrac{1}{2}s_{11}(\Xi_x^2+H_y^2)+\ldots+\tfrac{1}{2}\varDelta\Psi\right\} \\
& +\omega_0\left\{q_1(\Xi_x+H_y)+q_3 Z_z\right\}\vartheta \\
& +\omega_0\left\{r_1(\Xi_x+H_y)+r_3 Z_z\right\}\xi \\
& -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}c}{T_0}\vartheta^2+(\mathfrak{U}+\mathfrak{W}\vartheta)\xi-\xi\mu_1'.
\end{aligned} \tag{37''}$$

Dieser Ausdruck führt mit Rücksicht auf die Gleichungen (34), (23), (21) und (32') zu einer directen Ableitung der aus (25) folgenden Relationen.

Fall eines allseitig gleichen Druckes p und eines Zuges Γ in der Richtung der z-Axe.

Wir setzen:

$$\Xi_x = H_y = p, \; Z_z = p - \Gamma.$$

Es wird dann

$$\varDelta = (2s'_{11} + s'_{13})p - s'_{13}\Gamma, \quad \varPsi = (2s'_{22} + s'_{23})p^2 - 2s'_{23}p\Gamma + s'_{23}\Gamma^2$$

und wir erhalten:

$$x_x = y_y = s_{13}\Gamma - (s_{11} + s_{12} + s_{13})p - (s'_{11}\varDelta^2 + s'_{22}\varDelta p + \tfrac{1}{2}s'_{11}\varPsi) + r_1\zeta + q_1\vartheta,$$

$$z_z = s_{33}\Gamma - (2s_{13} + s_{33})p - (s'_{13}\varDelta^2 + s'_{23}\varDelta(p - \Gamma) + \tfrac{1}{2}s'_{13}\varPsi) + r_3\zeta + q_3\vartheta.$$

Die kubische Dilatation wird:

$$\begin{aligned} x_x + y_y + z_z = {} & (2s_{13} + s_{33})\Gamma - (2s_{11} + 2s_{12} + 4s_{13} + s_{33})p \\ & - \left\{2s'_{11} + s'_{13})\varDelta^2 + (2s'_{22} + s'_{23})\varDelta p - s'_{23}\varDelta\Gamma\right\} + \tfrac{1}{2}(2s'_{11} + s'_{13})\varPsi \\ & + (2r_1 + r_3)\zeta + (2q_1 + q_3)\vartheta. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (29) geben mit $-\Gamma = \Gamma_z$:

$$\frac{\omega'}{\omega_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\Gamma} = \frac{\partial z_z}{\partial p} + \frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial\Gamma}.$$

Substituirt man hier für z_z und $x_x + y_y + z_z$ die vorhergehenden Werthe, so ergiebt sich:

38) $$\left\{\frac{\omega'}{\omega_0} - \frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial\zeta}\right\}\frac{\partial\zeta}{\partial\Gamma} = \frac{\partial z_z}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial p}.$$

Weiter erhält man aus (29)

39) $$-\frac{\mathfrak{A}}{T}\frac{\partial Q\zeta}{\partial\Gamma} = \omega_0\frac{\partial z_z}{\partial\vartheta}$$

und

40) $$\mathfrak{A}\frac{\partial Q\zeta}{\partial p} = -\omega'(\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}T) + \omega_0\left\{2q_1 + q_3 + \frac{\partial(x_x + y_y + z_z)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\right\}.$$

Nach den Beobachtungen von Engelmann[1]) ist bei Darmsaiten $\frac{\partial z_z}{\partial\zeta}$ negativ, somit haben $\frac{\partial\zeta}{\partial\Gamma}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial p}$ entgegengesetztes Vorzeichen.

---

1) Th. W. Engelmann, über den Ursprung der Muskelkraft. Leipzig 1893.

Die Beobachtungen zeigen ferner, daß auch $\frac{\partial z_z}{\partial \vartheta}$ negativ ist; somit ist $\frac{\partial Q\xi}{\partial \Gamma}$ positiv.

Wenn man annimmt, daß Q im wesentlichen unabhängig von Γ, so wird für ein positives Q

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \text{ positiv, } \frac{\partial \xi}{\partial p} \text{ negativ.}$$

Dieses letztere Resultat steht in Widerspruch mit dem früher bei Caragheen gefundenen. Der Grund kann in der Verschiedenheit der Substanz oder in dem verschiedenen Grad der Quellung liegen. Bei Caragheen hatten wir eine relativ schwache Quellung; bei den Versuchen von Engelmann waren die Saiten umgeben von flüssigem Wasser und es handelte sich daher um maximale Quellungen.

V. Wärmezufuhr bei Zustandsänderungen des Systems.

Wir können das aus elastischem Körper und umgebendem Dampfe bestehende System entweder als ein Ganzes betrachten oder die beiden Phasen einzeln behandeln. Die Aenderungen, welche Energie, Entropie, Volumen des Ganzen erleiden, müssen sich stets zerlegen in die Summen der Aenderungen, welche den einzelnen Phasen entsprechen.

Wenn wir die Masse der elastischen Substanz als unveränderlich betrachten, so ist die Energiegleichung für den quellenden Körper:

$$d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - m\omega_0 \{A_x dx_x + B_y dy_y + \Gamma_z dz_z\} - m\omega_0 p d(x_x + y_y + z_z) + \mu_1 dm_{11}$$

für die flüssige Phase

$$d\varepsilon_1' = \mathfrak{A} T d\eta_1' - p dv' + \mu_1' dm_1',$$

somit der Zuwachs der Gesammtenergie:

$$d(\varepsilon + \varepsilon_1') = \mathfrak{A} T d(\eta + \eta_1') - m\omega_0 \{A_x dx_x + B_y dy_y + \Gamma_z dz_z\}$$
$$- p \{m\omega_0 d(x_x + y_y + z_z) + dv'\};$$

das Gesammtvolumen der beiden Phasen ist

$$V = m\omega_0 (1 + x_x + y_y + z_z) + v'.$$

Somit

$$d(\varepsilon + \varepsilon_1') = \mathfrak{A} T d(\eta + \eta_1') - m\omega_0 \{A_x dx_x + B_y dy_y + \Gamma_z dz_z\} - p dV.$$

Wir gehen nun über zu der Betrachtung der Entropie. Für $dm = 0$ wird entsprechend Gl. (17)

41) $$d(u - \mathfrak{A}T\eta) = -\mathfrak{A}\eta d\vartheta + m\omega_0 \{x_x d\Xi_x + y_y dH_y + z_z dZ_z\} + m\mu_1 d\zeta;$$

denken wir uns ζ ausgedrückt durch ϑ, Ξ_x, H_y, Z_z und p, so wird:

42) $$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{\partial \zeta}{\partial \Xi_x} d\Xi_x + \frac{\partial \zeta}{\partial H_y} dH_y + \frac{\partial \zeta}{\partial Z_z} dZ_z + \frac{\partial \zeta}{\partial p} \cdot dp,$$

und mit $u - \mathfrak{A}T\eta = w$:

43) $$\frac{\partial w}{\partial p} = m\mu_1 \frac{\partial \zeta}{\partial p}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -\mathfrak{A}\eta + m\mu_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \Xi_x} = m\omega_0 x_x + m\mu_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \Xi_x}$$

. . . .

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

44) $$-\mathfrak{A}\frac{d\eta}{d\Xi_x} = m\omega_0 \frac{dx_x}{d\vartheta} + m\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial \Xi_x} \cdot \frac{d\mu_1}{d\vartheta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\mu_1}{d\Xi_x}\right\}$$

. . . .

$$-\mathfrak{A}\frac{d\eta}{dp} = m\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial p} \cdot \frac{d\mu_1}{d\vartheta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\mu_1}{dp}\right\}.$$

Die Zeichen d sollen darauf hinweisen, daß die betreffenden Differentiationen vollständig auszuführen sind, nicht blos soweit die Variabelen explicite in den betreffenden Funktionen auftreten, sondern auch soweit sie implicite in ζ enthalten sind. Es ist ferner:

$$d\eta = \frac{d\eta}{d\vartheta} d\vartheta + \frac{d\eta}{d\Xi_x} d\Xi_x + \frac{d\eta}{dH_y} dH_y + \frac{d\eta}{dZ_z} dZ_z + \frac{d\eta}{dp} dp$$

oder mit Benutzung von (44)

45) $$d\eta = \frac{d\eta}{d\vartheta} d\vartheta - \frac{1}{\mathfrak{A}} m\omega_0 \left\{\frac{dx_x}{d\vartheta} d\Xi_x + \frac{dy_y}{d\vartheta} dH_y + \frac{dz_z}{d\vartheta} dZ_z\right\}$$
$$- \frac{m}{\mathfrak{A}} \frac{d\mu_1}{d\vartheta} \cdot d\zeta + \frac{m}{\mathfrak{A}} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \cdot d\mu_1.$$

Bei der flüssigen Phase kann die Energiegleichung in die Form gebracht werden:

$$d\varepsilon_1' = \mathfrak{A}Td\eta_1' - pdv' - m\mu_1' d\zeta.$$

Woraus mit $w' = \varepsilon_1' + pv' - \mathfrak{A}T\eta_1'$:

$$\frac{\partial w'}{\partial \vartheta} = -\mathfrak{A}\eta_1' - m\mu_1' \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}$$

46)
$$\frac{\partial w'}{\partial p} = v' - m\mu_1' \frac{\partial \xi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial \Xi_x} = - m\mu_1' \frac{\partial \xi}{\partial \Xi_x}$$

. . . .

Wir erhalten ferner:

$$-\mathfrak{A}\frac{d\eta_1'}{dp} = \frac{dv'}{d\vartheta} - m\left\{\frac{\partial \xi}{\partial p}\cdot\frac{d\mu_1'}{d\vartheta} - \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}\cdot\frac{d\mu_1'}{dp}\right\}$$

47)
$$-\mathfrak{A}\frac{d\eta_1'}{d\Xi_x} = -m\frac{\partial \xi}{\partial \Xi_x}\cdot\frac{d\mu_1'}{d\vartheta}$$

. . . .

Nun ist

$$d\eta_1' = \frac{d\eta_1'}{d\vartheta}\cdot d\vartheta + \frac{d\eta_1'}{dp}dp + \frac{d\eta_1'}{d\Xi_x}d\Xi_x + \frac{d\eta_1'}{dH_y}dH_y + \frac{d\eta_1'}{dZ_z}dZ_z$$

oder mit Rücksicht auf (46)

48) $$d\eta_1' = \frac{d\eta_1'}{d\vartheta}d\vartheta - \frac{1}{\mathfrak{A}}\frac{dv'}{d\vartheta}dp + \frac{m}{\mathfrak{A}}\frac{d\mu_1'}{d\vartheta}d\xi - \frac{m}{\mathfrak{A}}\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}d\mu_1'.$$

Für den Entropiezuwachs des ganzen Systems ergiebt sich:

$$d\eta + d\eta_1' = \frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta}d\vartheta - \frac{1}{\mathfrak{A}}m\omega_0\left\{\frac{dx_x}{d\vartheta}\cdot d\Xi_x + \frac{dy_y}{d\vartheta}dH_y + \frac{dz_z}{d\vartheta}dZ_z\right\}$$

49)
$$-\frac{1}{\mathfrak{A}}\cdot\frac{dv'}{d\vartheta}dp.$$

Bezeichnen wir durch M_1 die ganze vorhandene Wassermasse, so ist

$$m_1' = M_1 - m_1 = M_1 - m\xi$$

und

$$v' = m_1'\omega' = M_1\omega' - m\xi\omega'.$$

Substituiren wir den angegebenen Werth von v' in (49), so ergiebt sich:

$$
50)\quad \begin{aligned} d\eta + d\eta_1' = {} & \frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta}\, d\vartheta \\ & - \frac{1}{\mathfrak{A}}\, m\omega_0 \left\{ \frac{dx_x}{d\vartheta}\, d\Xi_x + \frac{dy_y}{d\vartheta}\, dH_y + \frac{dz_z}{d\vartheta}\, dZ_z \right\} \\ & - \frac{M_1}{\mathfrak{A}} \frac{\partial\omega'}{\partial\vartheta} \cdot dp + \frac{m}{\mathfrak{A}} \frac{\partial(\omega'\zeta)}{\partial\vartheta}\, dp, \end{aligned}
$$

oder mit Hülfe der aus (25) folgenden Differentialbeziehungen:

$$
50')\quad \begin{aligned} d\eta + d\eta_1' = {} & \frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta}\, d\vartheta - \frac{m}{T}\, d(Q\zeta) + \frac{m}{T} \frac{\partial Q\zeta}{\partial\vartheta}\, d\vartheta \\ & - \frac{M_1}{\mathfrak{A}} \frac{\partial\omega'}{\partial\vartheta}\, dp. \end{aligned}
$$

Die bei der betrachteten Zustandsänderung dem System zugeführte Wärme ist:

$$
51)\quad d\Omega = T(d\eta + d\eta_1')
$$

wo für $d\eta + d\eta_1'$ einer der Werthe (49), (50) oder (50′) zu setzen ist.

VI. Kreisprocesse.

Bei dem von uns betrachteten System ist eine grosse Mannigfaltigkeit von verschiedenen Kreisprocessen denkbar. Einige typische Beispiele werden durch die folgenden Schemata dargestellt; die Drucke H_y, Z_z werden dabei als konstant betrachtet.

$$
1)\quad \begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \xrightarrow{a} & \vartheta'\Xi_x p \\ \uparrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \vartheta\Xi_x' p & \xleftarrow{c} & \vartheta'\Xi_x' p \end{array}
$$

$$
2)\quad \begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta'\Xi_x p \\ \uparrow & & \downarrow \\ \vartheta\Xi_x p' & \leftarrow & \vartheta'\Xi_x p' \end{array}
$$

$$
3)\quad \begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta\Xi_x p' \\ \uparrow & & \downarrow \\ \vartheta\Xi_x' p & \leftarrow & \vartheta\Xi_x' p' \end{array}
$$

Wir können diese Processe noch durch Einschaltung adiabatischer Uebergänge abändern und erhalten so die weiteren Schemata:

4) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta'\Xi_x p \\ \uparrow \text{ adiabatisch} & & \downarrow \text{ adiabatisch} \\ \vartheta'''\Xi'_x p & \leftarrow & \vartheta''\Xi'_x p \end{array}$$

5) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta'\Xi_x p \\ \uparrow \text{ adiab.} & & \downarrow \text{ adiab.} \\ \vartheta'''\Xi_x p' & \leftarrow & \vartheta''\Xi_x p' \end{array}$$

6) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta\Xi'_x p \\ \uparrow \text{ adiab.} & & \downarrow \text{ adiab.} \\ \vartheta'\Xi'''_x p & \leftarrow & \vartheta'\Xi''_x p \end{array}$$

7) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta\Xi_x p' \\ \uparrow \text{ adiab.} & & \downarrow \text{ adiab.} \\ \vartheta'\Xi_x p''' & \leftarrow & \vartheta'\Xi_x p'' \end{array}$$

8) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta\Xi_x p' \\ \uparrow \text{ adiab.} & & \downarrow \text{ adiab.} \\ \vartheta'\Xi''_x p & \leftarrow & \vartheta'\Xi'_x p' \end{array}$$

9) $$\begin{array}{ccc} \vartheta\Xi_x p & \rightarrow & \vartheta\Xi'_x p \\ \uparrow \text{ adiab.} & & \downarrow \text{ adiab.} \\ \vartheta'\Xi_x p'' & \leftarrow & \vartheta'\Xi'_x p'. \end{array}$$

Nehmen wir an, daß die Processe zwischen unendlich benachbarten Grenzcurven sich abspielen, so sind nach (49) die auf den Wegen a, b, c, d zugeführten Wärmemengen bei dem ersten Proceß:

$$d\Omega_a = T\frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta}\,d\vartheta$$

$$d\Omega_b = -(T+d\vartheta)\,\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\left\{\frac{dx_x}{d\vartheta}+\frac{d^2x_x}{d\vartheta^2}\,d\vartheta\right\}d\Xi_x$$

$$d\Omega_c = -T\left\{\frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta}+\frac{d^2(\eta+\eta_1')}{d\vartheta\,d\Xi_x}\,d\Xi_x\right\}d\vartheta$$

$$d\Omega_d = T\,\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\cdot\frac{dx_x}{d\vartheta}\,d\Xi_x,$$

somit die ganze zugeführte Wärmemenge:

$$d\Omega = -\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\,\frac{dx_x}{d\vartheta}\,d\vartheta\,d\Xi_x$$
$$-\frac{T}{\mathfrak{A}}\,\frac{d}{d\vartheta}\left\{\mathfrak{A}\,\frac{d\eta}{d\Xi_x}+\mathfrak{A}\,\frac{d\eta_1'}{d\Xi_x}+m\omega_0\,\frac{dx_x}{d\vartheta}\right\}d\vartheta\,d\Xi_x$$

und mit Benutzung der Gleichungen (22) und (44)

$$52)\qquad d\Omega = -\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dx_z}{d\vartheta}\, d\vartheta\, d\Xi_z.$$

Die bei dem Kreisproceß von dem System geleistete Arbeit ist gleich $\mathfrak{A} d\Omega$.

Bei dem zweiten Kreisproceß ergiebt sich ebenso

$$53)\qquad d\Omega = -\frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dv'}{d\vartheta}\, d\vartheta\, dp.$$

Der dritte Proceß spielt sich bei konstanter Temperatur ab, die zugeführte Wärme und die geleistete Arbeit sind somit gleich Null.

Die bei den beiden ersten adiabatischen Processen zugeführten und in Arbeit verwandelten Wärmemengen sind:

$$54)\qquad d\Omega = -\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\, T \frac{d^2 x_z}{d\vartheta^2}\, d\vartheta\, d\Xi_z$$

und

$$55)\qquad d\Omega = -\frac{T}{\mathfrak{A}} \frac{d^2 v'}{d\vartheta^2} \cdot d\vartheta\, dp.$$

Bei dem Processe (6) werden auf den Wegen a und c die Wärmemengen zugeführt:

$$d\Omega_a = -T \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \frac{dx_z}{d\vartheta}\, d\Xi_z^a$$

$$d\Omega_c = (T + d\vartheta) \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left(x_z + \frac{dx_z}{d\vartheta}\, d\vartheta + \frac{dx_z}{d\Xi_z}\, d\Xi_z^d \right) d\Xi_z^c.$$

Für die ganze zugeführte Wärmemenge ergiebt sich; da $d\Xi_z^a + d\Xi_z^b = d\Xi_z^d + d\Xi_z^c$:

$$d\Omega = -T \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{dx_z}{d\vartheta} d\Xi_z^d - \frac{dx_z}{d\vartheta}\, d\Xi_z^b \right\}$$

$$+ \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \frac{dx_z}{d\vartheta} \cdot d\vartheta\, d\Xi_z$$

$$+ T \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{d^2 x_z}{d\vartheta^2}\, d\vartheta + \frac{d}{d\Xi_z} \cdot \frac{dx_z}{d\vartheta}\, d\Xi_z^d \right\} d\Xi_z^c.$$

Nun ist der Weg d ein adiabatischer, somit:

$$\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dx_z}{d\vartheta} \cdot d\Xi_z^d = \frac{d(\eta + \eta_1')}{d\vartheta}\, d\vartheta.$$

Substituirt man diesen Werth in der zweiten Klammer, so folgt aus den Gleichungen (44) und (47), daß ihr Inhalt verschwindet; es ist ferner:

$$\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dx_x}{d\vartheta} d\Xi_x^b = \frac{d}{d\vartheta}\left\{\eta + \eta_1' + \frac{d(\eta + \eta_1')}{d\Xi_x} d\Xi_x^a\right\} d\vartheta.$$

Somit

$$-T\frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\frac{dx_x}{d\vartheta}(d\Xi_x^d - d\Xi_x^b) = T\frac{d}{d\vartheta}\frac{d(\eta + \eta_1')}{d\Xi_x} d\Xi_x d\vartheta$$

und wieder mit Benutzung der Gl. (44) und (47)

56) $$d\Omega = \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\left(\frac{dx_x}{d\vartheta} - T\frac{d^2x_x}{d\vartheta^2}\right) d\vartheta\, d\Xi_x.$$

Ebenso ergiebt sich für den Proceß (7)

57) $$d\Omega = \frac{1}{\mathfrak{A}}\left(\frac{dv'}{d\vartheta} - T\frac{d^2v'}{d\vartheta^2}\right) d\vartheta\, dp.$$

Die bei dem Proceß (8) zugeführten Wärmemengen sind:

$$d\Omega_a = -\frac{T}{\mathfrak{A}}\frac{dv'}{d\vartheta} dp$$

$$d\Omega_b = +\frac{T + d\vartheta}{\mathfrak{A}}\frac{d}{d\vartheta}\left\{v' + \frac{dv'}{d\vartheta} d\vartheta + \frac{dv'}{d\Xi_x} d\Xi_x^d\right\} dp$$

$$+\frac{m\omega_0(T + d\vartheta)}{\mathfrak{A}}\frac{d}{d\vartheta}\left\{x_x + \frac{dx_x}{d\vartheta} d\vartheta + \frac{dx_x}{d\Xi_x} d\Xi_x^d\right\} d\Xi_x^c.$$

Somit

$$d\Omega = \frac{1}{\mathfrak{A}}\frac{dv'}{d\vartheta} d\vartheta\, dp + \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}}\frac{dx_x}{d\vartheta} d\vartheta\, d\Xi_x^c$$

$$+\frac{T}{\mathfrak{A}}\left\{\frac{d^2v'}{d\vartheta^2} dp\, d\vartheta + \frac{d^2v'}{d\Xi_x d\vartheta} dp\, d\Xi_x^d\right.$$

$$\left. + m\omega_0\frac{dx_x}{d\vartheta} d\Xi_x^c + m\omega_0\frac{d^2x_x}{d\vartheta^2} d\Xi_x^c d\vartheta + m\omega_0\frac{d^2x_x}{d\Xi_x d\vartheta} d\Xi_x^d d\Xi_x^c\right\}.$$

Nun ist

$$d\Xi_x^b = d\Xi_x^d + d\Xi_x^c$$

und da die Wege b und d adiabatisch sind:

$$m\omega_0 \frac{dx_x}{d\vartheta} d\Xi_x^a = \mathfrak{A} \frac{d(\eta+\eta_1')}{d\vartheta} d\vartheta$$

$$m\omega_0 \frac{d}{d\vartheta} \left\{ x_x + \frac{dx_x}{dp} dp \right\} d\Xi_x^b = \mathfrak{A} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \eta + \eta_1' + \frac{d(\eta+\eta_1')}{dp} dp \right\} d\vartheta.$$

Woraus durch Subtraktion

$$m\omega_0 \frac{dx_x}{d\vartheta} d\Xi_x^c + m\omega_0 \frac{d^2 x_x}{d\vartheta dp} d\Xi_x^b dp = \mathfrak{A} \frac{d^2(\eta+\eta_1')}{dp d\vartheta} d\vartheta\, dp.$$

Substituiren wir diesen Werth in der Gleichung für $d\Omega$, so ergiebt sich mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung

$$d\Omega = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dv'}{d\vartheta} d\vartheta\, dp$$

$$+ \frac{T}{\mathfrak{A}} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \left(\frac{dv'}{d\vartheta} + \mathfrak{A} \frac{d(\eta+\eta_1')}{dp} \right) dp\, d\vartheta + \left(\frac{dv'}{d\Xi_x} - m\omega_0 \frac{dx_x}{dp} \right) dp\, d\Xi_x \right\}.$$

Von den in der Klammer enthaltenen Ausdrücken ist der erste nach (44) und (47) Null. Es ergiebt sich ferner aus den Gl. (43) und (46)

$$m\omega_0 \frac{dx_x}{dp} = m \left\{ \frac{d\mu_1}{d\Xi_x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} - \frac{d\mu_1}{dp} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \Xi_x} \right\}$$

$$\frac{dv'}{d\Xi_x} = -m \left\{ \frac{d\mu_1'}{dp} \frac{\partial \xi}{\partial \Xi_x} - \frac{d\mu_1'}{d\Xi_x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} \right\}.$$

Somit ist auch der zweite Theil der Klammer Null und man erhält schließlich

58) $$d\Omega = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{dv'}{d\vartheta} \cdot d\vartheta\, dp.$$

Ebenso ergiebt sich für die bei dem Kreisproceß (9) zugeführte Wärme

59) $$d\Omega = \frac{m\omega_0}{\mathfrak{A}} \frac{dx_x}{d\vartheta} d\vartheta\, d\Xi_x.$$

Wir haben uns im Vorhergehenden auf die Betrachtung von Kreisprocessen beschränkt, welche zwischen unendlich benachbarten Grenzen sich abspielen. Ihre Kenntniß genügt, um die bei beliebigen Kreisprocessen geleistete Arbeit zu berechnen. Um dieses zu zeigen, benützen wir eine graphische Darstellung der Verände-

rungen, indem wir auf 3 zu einander rechtwinkligen Axen die Werthe von ϑ, p, Ξ_x abtragen; die Axe der Temperatur sei vertikal. Einen beliebigen Kreisproceß stellen wir durch eine geschlossene Raumcurve s dar und legen durch sie eine beliebige Fläche F. Wir schneiden diese durch Horizontalebenen H, H_1, ... welche in dem Abstand $d\vartheta$ auf einander folgen. Die Schnittcurven seien AB, A_1B_1, A_2B_2 ... An Stelle des gegebenen Processes setzen wir eine Summe von Processen, bei denen die Flächen ABB_1A_1 $A_1B_1B_2A_2$ ... der Reihe nach durchlaufen werden. Von den neuen Processen betrachten wir denjenigen, welcher sich zwischen den Curven AB und A_1B_1 abspielt.

Die Curve AB projiciren wir auf die durch A_1B_1 gehende Horizontalebene H_1 in AB und ziehen zwischen den Curven A_1B_1 und AB den polygonalen Zug $\alpha a_1 \beta b_1 \gamma c_1$ so, daß die Seiten αa_1, βb_1, γc_1 parallel der Axe p, die Seiten $a_1\beta$, $b_1\gamma$ parallel mit Ξ_x sind. Durch die Puncte α, β, γ ziehen wir Parallelen zu der Axe ϑ, und erhalten auf AB die Schnittpuncte a, b, c und die Parallelogramme abb_1a_1, bcc_1b_1. Durch a, b, c ziehen wir Parallelen zu den Axen p und Ξ_x, die sich in d und e schneiden; d projiciren wir nach δ, e nach ε und ziehen noch $\alpha\delta$, $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\gamma$. Kreisprocesse bei konstanter Temperatur liefern keine Arbeit, wir können somit die Wege abc und $c_1b_1a_1$ durch $adbec$ und $c_1\gamma b_1\beta a_1\alpha$ ersetzen. Lassen wir nun noch die Strecken aa_1, bb_1 cc_1, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ $d\delta$, $e\varepsilon$, $\delta\beta$, $\varepsilon\gamma$, $\alpha\delta$ und $\beta\varepsilon$ je zweimal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, so ergiebt sich, daß an Stelle der ursprünglichen Wege treten können: entweder die Kreisprocesse:

$$abb_1a_1a \text{ und } bcc_1b_1b$$

oder die Kreisprocesse:

$$ad\delta\alpha a, \quad db\beta\delta d, \quad \delta\beta a_1\alpha\delta,$$
$$be\varepsilon\beta b, \quad ec\gamma\varepsilon e, \quad \varepsilon\gamma b_1\beta\varepsilon.$$

Der bei konstanter Temperatur vor sich gehende Proceß $\delta\beta a_1\alpha\delta$ leistet keine Arbeit. Daher führt unsere Betrachtung zu dem Schluß, daß der Proceß abb_1a_1a zu ersetzen ist durch die Summen der Processe $ad\delta\alpha a$ und $db\beta\delta d$. Nun sei

$$ad = d\Xi_x, \quad a\alpha = d\vartheta, \quad \alpha a_1 = dp.$$

Die Summe der Arbeiten ist:

$$d\Omega = -m\omega_0 \frac{dx_x}{d\vartheta} d\vartheta\, d\Xi_x - \frac{dv'}{d\vartheta} \cdot d\vartheta\, dp.$$

Bezeichnen wir den Inhalt von $abb_1 a_1$ durch df, seine Normale durch n, so ist

$$d\Omega = -\left\{m\omega_0 \frac{dx_\varepsilon}{d\vartheta} \cos(n, p) + \frac{dv'}{d\vartheta} \cos(n, \Xi_\varepsilon)\right\} df.$$

Die Arbeit, welche bei dem ganzen durch die Raumcurve s dargestellten Kreislauf geleistet wird, ist somit

60) $$\Omega = -\int_F \left\{m\omega_0 \frac{dx_\varepsilon}{d\vartheta} \cos(n, p) + \frac{dv'}{d\vartheta} \cos(n, \Xi_\varepsilon)\right\} df$$

wo die Integration sich über alle Elemente der Fläche F hin erstreckt. Die so für die Arbeit gewonnene Gleichung enthält die Entropie nicht, während in dem ursprünglichen Ausdruck durch ein über den Rand von F sich erstreckendes Integral nach (49) ein von der Entropie abhängendes Glied auftritt.

Ueber einen neuen harmonischen Analysator.

Von

O. Henrici in London.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein).

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1894.

....In Bezug auf das Instrument erinnere ich zunächst daran daß die zu analysirende Curve, welche y als Function von x bestimmt so verzeichnet sein muß, daß sie sich von $x = 0$ bis $x = c$ erstreckt, wo c die Basis bezeichnet für die das Instrument construirt ist. Diese Curve kann natürlich ganz beliebig sein so lange sie endlich und eindeutig verläuft. Hat sie aber Unstetigkeiten, indem sie für ein bestimmtes x von einem Werthe y_1 zu y_2 überspringt, so müssen diese Punkte durch das Stück $y_2 - y_1$ der Ordinate verbunden werden. In derselben Weise müssen die Anfangs- und End-Ordinate gleichgemacht und die sie erhaltenen Endpunkte durch eine zur x-Axe parallelle Grade verbunden werden. Man erhält so einen geschlossenen Linienzug und dieser wird vollständig mit dem Jahrstift des Instrumentes durchlaufen indem man vom Anfangspunkt der Curve ausgehend zunächst die Curve durchläuft und dann zu ihm zurückkehrt.

Schreibt man nun

$$\begin{aligned} y = A_0 + A_1 \cos \Theta + A_2 \cos 2\Theta + \cdots \\ + B_1 \sin \Theta + B_2 \sin 2\Theta + \cdots \end{aligned} \qquad \Theta = \frac{2\pi x}{c}$$

so hat der Analisator die Coefficienten A und B zu ermitteln mit Ausnahme von A_0, den man mittels eines Planimetes bestimmt. Die bekannten Integrale welche die übrigen Coefficienten bestimmen, werden durch theilweise Integration umgeformt. Hierbei verschwinden die integrirten Theile, weil die Curve continuirlich gemacht ist. Man hat dann

$$nA_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\Theta . dy, \quad nB_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\Theta . dy.$$

Das Instrument giebt diese Werthe.

Seine wesentlichen Theile sind ein Cylinder mit horizontaler Axe und eine darüberstehende vertikale Spindel deren Axe diejenige des Cylinders schneidet. Zwischen diese ist der eigentliche Integrationsapparat eingeschaltet. Diese Theile sind so arrangirt, daß, während der Jahrstift die Curve beschreibt bis zu einem bestimmten Punkte x, die Spindel sich um den Winkel $n\Theta$ dreht, der Cylinder aber um einen Winkel der zu dy proportional ist für jedes Fortschreiten des Stiftes um dy.

In dem ersten Instrument welches Herr Coradi für das Guild's Central Technical College construirt hat, trägt die Spindel eine Registrirrolle, ähnlich derjenigen die von Amslet's Planimeter her bekannt ist[1]). Diese rollt und gleitet auf dem Cylinder und registrirt immer das Element $\sin n\Theta . dy$ oder $\cos n\Theta . dy$, giebt also die verlangten Integrale. Hierbei ist jedoch das Gleiten der Rolle immer ein Uebelstand. Ferner stellte sich heraus, daß der federnde Streifen Stahlblech durch den die Registrirrolle mit der Spindel verbunden ist, etwas tordirt und dadurch Fehler verursacht. Auch sind für die beiden zusammengehörigen Coefficienten A_n und B_n zwei getrennte Spindeln nöthig.

In dem neuen Instrumente von dem das erste Exemplar für die Göttinger Universität angefertigt ist, hat Herr Coradi in sehr sinnreicher Weise eine Glaskugel zwischen dem Cylinder und den Registrirrollen eingefügt. Diese ruht ganz frei beweglich auf dem Cylinder. Die Spindel trägt unten einen Rahmen der fest mit ihr verbunden ist und welcher gleich zwei Registrirrollen trägt deren Axen zu einander senkrecht stehen. Eine Spindel thut daher die Dienste von zwei im alten Instrument. Die beiden Rollen berühren die Kugel in deren größten Horizontalkreise. Ihre vertikalen Ebenen gehen durch den Mittelpunkt der Kugel. Eine dritte Rolle, den Registrirrollen symmetrisch gegenüberstehend, wird durch eine Feder gegen die Kugel gedrückt und

---

1) Man vergl. den von Dyck im Auftrage der deutschen Mathematikervereinigung anläßlich der Münchener mathematischen Ausstellung herausgegebenen Katalog mathematischer Modelle und Apparate, München 1892—93, Nachtrag pag. 34 Es ist kaum nöthig, daß ich hier auf die sonstigen mannigfachen Ausführungen verweise, welche der genannte Katalog über die bisherigen Constructionen harmonischer Analysatoren enthält.

sichert so eine fortwährende Berührung, während sie zugleich die Lage der Kugel geometrisch feststellt.

Wird nun der Jahrstift um ein Element der Curve verschoben, so wird sich der Cylinder um einen zu dem entsprechenden dy proportionalen Winkel drehen und dadurch wird die Kugel um denjenigen horizontalen Durchmesser, welcher der x-Axe proportional ist, gedreht und zwar ebenfalls um einen zu dy proportionalen Winkel. Nun hat sich aber die Spindel, während der Jahrstift vom Anfangspunkt der Curve bis zum in Rede stehenden Curvenelement fortgeschritten ist, um den Winkel $n\Theta$ gedreht. Die erste Registrirrolle deren Ebene Anfangs der x-Axe parallel war, macht daher ebenfalls einen Winkel $n\Theta$ mit dieser Richtung, die zweite aber einen um $\frac{\pi}{2}$ größeren Winkel. Diese Rollen werden daher die Kugel in Punkten berühren, deren Abstände von der horizontalen Drehaxe der letzteren gleich $r \sin n\Theta$ resp. $r \cos n\Theta$ sind. Während also der Jahrstift das Curvenelement durchläuft, drehen sich diese Rollen um Winkel welche zu $dy \sin n\Theta$ und $dy \cos n\Theta$ proportional sind. Beschreibt also der Jahrstift die ganze Curve von $x = 0$ bis $x = c$, so geben die Ablesungen der Rollen die verlangten Werthe nA_n und nB_n und zwar sind die Dimensionen so gewählt, daß die Ablösungen in millimetern gegeben werden.

Wird die Spindel, beim Vorwärtsbewegen des Jahrstiftes in der Richtung der x-Axe, gedreht, so nehmen die Rollen die Kugel mit, so daß diese sich zapfenartig um ihren Unterstützungspunkt dreht. Es ist also alles Gleiten vermieden.

Es ist noch zu erwähnen, daß eine unrichtige Lage der Kugel bei ungenauer Justirung nur in dem Falle einen erheblichen Fehler in der Ablösung hervorrufen kann, wenn der Berührungspunkt mit dem Cylinder nicht in die Axe der Spindel fällt. Der Berührungspunkt wird in diesem Falle bei jeder Umdrehung der Spindel einen kleinen Kreis beschreiben. Die Kugel wird in Folge dessen auf dem Cylinder rollen und diese Bewegung wird sich den Registrirrollen mittheilen. Da nun gerade diese Justirung schwer herzustellen ist, so ist es von Wichtigkeit diesen Fehler zu eliminiren, indem man die Kugel diese störenden Rotationen in umgekehrter Richtung wiederholen läßt. Dies geschieht, wenn man den Jahrstift nach dem Durchlaufen der Curve parallel der x-Axe zum Anfangspunkt zurückführt.

London, den 30. Januar 1894.

Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie.

(Fortsetzung).

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1894.

In No. 13 des vorigen Bandes der Gött. Nachr. habe ich mich mit den Folgerungen beschäftigt, welche die Elasticitätstheorie aus einem durch die Glieder dritten Grades erweiterten elastischen Potentiale für die wichtigsten der Beobachtung zugänglichen Vorgänge zu ziehen gestattet. Bei der Bildung dieses erweiterten Potentiales für isotrope Media habe ich mich zunächst der für das gewöhnliche Potential gebräuchlichen Methode bedient, alle Glieder dritten Grades angesetzt und ihre Anzahl nach den Symmetrieverhältnissen reducirt. Die letzte Rechnung wirklich durchzuführen ersparte mir ein Satz, den mir Herr College Schönflies, mit dem ich gelegentlich das Problem besprach, freundlichst mittheilte, wonach alle ganzen rationalen Functionen der Deformationsgrößen $x_x \dots x_y$, welche sich bei Aenderung des Coordinatensystems nicht ändern, wie dies für das Potential in einem isotropen Körper stattfinden muß, ganze rationale Functionen der beiden Aggregate

$$\delta = x_x + y_y + z_z \text{ und } \vartheta = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$$

sein müssen. Hiernach könnte man ohne alle Rechnung für das erweiterte Potential F den Ansatz machen

$$2F = c_1\delta^2 + c_2\vartheta + \tfrac{2}{3}c_1'\delta^3 + c_2'\vartheta\delta,$$

welcher auch meinen Rechnungen zu Grunde gelegt ist.

Herr L. Stickelberger in Freiburg hat die Güte gehabt, mir mitzutheilen, daß der Schönflies'sche Satz nicht richtig ist. Er stellt dagegen den folgenden auf und giebt für ihn den beigefügten eleganten Beweis.

„Satz. Jede Function der sechs Deformationsgrößen, die von der Wahl der Coordinatenaxen unabhängig ist, hängt nur von den folgenden drei Verbindungen δ, η, ζ derselben ab, denen jene Eigenschaft wirklich zukömmt

$$\delta = x_x + y_y + z_z,$$
$$\eta = y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y - \tfrac{1}{4}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2),$$
$$\zeta = x_x y_y z_z + \tfrac{1}{4} y_z z_x x_y - \tfrac{1}{4}(x_x y_z^2 + y_y z_x^2 + z_z x_y^2).$$

Speciell ist jede $\left\{\begin{matrix}\text{eindeutige}\\ \text{ganze rationale}\end{matrix}\right\}$ Function jener sechs Größen, welcher die angegebene Eigenschaft zukömmt, eine $\left\{\begin{matrix}\text{eindeutige}\\ \text{ganze rationale}\end{matrix}\right\}$ Function dieser drei Verbindungen“.

„Beweis. Die Formänderung, die durch die sechs Größen $x_x, \ldots x_y$ definirt ist, läßt sich bekanntlich auch characterisiren durch die drei Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 und die drei zu einander senkrechten Richtungen, in denen sie stattfinden. Während nun diese Richtungen nur durch Beziehung auf ein Axensystem festgelegt werden können und unter Umständen nur theilweise bestimmt sind, sind jene Dilatationen völlig bestimmt; irgend eine derselben bleibt sogar dann ungeändert, wenn man den „Sinn“ der betreffenden Axe in den entgegengesetzten verwandelt. Ist nun die Function $F(x_x, \ldots, x_y)$, die der Präcision halber gleich als eindeutig vorausgesetzt sein mag, unabhängig von den Axenrichtungen, so kann man, ohne ihren Werth zu ändern, die Coordinatenaxen mit den Hauptdilatationsaxen zusammenfallen lassen, und zwar in beliebiger Reihenfolge, da nach obiger Bemerkung der Sinn der Coordinatenaxe auf die Werthe der Hauptdilatationen ohne Einfluß ist. Dadurch werden aber y_z, z_x und x_y gleich Null, während x_x, y_y, z_z in beliebiger Reihenfolge mit λ_1, λ_2, λ_3 zusammenfallen. F muß also eine eindeutige und symmetrische Function der drei Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 und somit eine eindeutige Function der elementaren symmetrischen Functionen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \; \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2, \; \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

sein, ja sogar eine ganze rationale Function der letzteren Größen, wenn sie eine ganze rationale Function der ursprünglichen sechs ist. Aber λ_1, λ_2, λ_3 sind (Kirchhoff's Mechanik, S. 106) die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_x - \lambda, & \tfrac{1}{2} x_y, & \tfrac{1}{2} x_z \\ \tfrac{1}{2} y_x, & y_y - \lambda, & \tfrac{1}{2} y_z \\ \tfrac{1}{2} z_x, & \tfrac{1}{2} z_y, & z_z - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich das Weitere unmittelbar ergiebt". (In der That ist nach Vorstehendem

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2, \quad \eta = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2, \quad \zeta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3).$$

„Daß die Coefficienten dieser Gleichung die verlangte Eigenschaft wirklich besitzen, folgt entweder aus der geometrischen Bedeutung der Wurzeln, oder algebraisch aus der Bedeutung der quadratischen Form

$$x_x \alpha^2 + y_y \beta^2 + z_z \gamma^2 + y_z \beta\gamma + z_x \gamma\alpha + x_y \alpha\beta.$$

Auch ist klar, daß zwischen den drei Functionen δ, η, ζ der sechs Deformationsgrößen keine Gleichung bestehen kann, solange die sechs Größen selbst als willkürlich, d. h. unabhängig veränderlich gelten; denn eine solche Gleichung würde für $y_z = 0$, $z_x = 0$, $x_y = 0$ in eine wirkliche Relation zwischen x_x, y_y, z_z übergehen, in Widerspruch mit der angenommenen Unabhängigkeit".

Hieraus folgt, daß die zu dem gewöhnlichen elastischen Potential $F = \frac{1}{2}(c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta)$ behufs Erweiterung zu fügenden Zusatzglieder ausschließlich aus den Aggregaten δ, η, ζ oder da $\delta^2 - 2\eta = \vartheta$ ist, aus δ, ϑ und ζ zu bilden sind.

Das vervollständigte elastische Potential F nimmt demgemäß bei der Beschränkung auf die Glieder dritten Grades die Gestalt an

$$1) \qquad 2F = c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta + \tfrac{2}{3} c_1' \delta^3 + c_2' \vartheta\delta + 2 c_3' \zeta,$$

worin

$$2) \qquad \begin{aligned} \delta &= x_x + y_y + z_z, \\ \vartheta &= x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2), \\ \zeta &= x_x y_y z_z + \tfrac{1}{4} y_z z_x x_y - \tfrac{1}{4}(x_x y_z^2 + y_y z_x^2 + z_z x_y^2) \end{aligned}$$

und die Kraftcomponenten lauten

$$3) \qquad \begin{aligned} -X_x &= c_1 \delta + c_2 x_x + c_1' \delta^2 + \tfrac{1}{2} c_2' (\vartheta + 2 x_x \delta) + c_3' (y_y z_z - \tfrac{1}{4} y_z^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -Y_z &= \tfrac{1}{2}(c_2 y_z + c_2' y_z \delta + c_3' (\tfrac{1}{2} z_x x_y - x_x y_z)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hierzu treten die allgemeinen Gleichungen für nicht starre Körper

$$4)\qquad \varepsilon\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z},$$

. . . .

$$5)\qquad \overline{X}+\overline{X}_x\cos(n,x)+\overline{X}_y\cos(n,y)+\overline{X}_z\cos(n,z)=0.$$

. . . .

Führt man, um angenäherte Lösungen zu erhalten, ein

$$6)\qquad u=u^0+u',\quad v=v^0+v',\quad w=w^0+w'$$

und versteht unter u^0, v^0, w^0 die Lösungen des speciellen Problems, welche dem alten Potential entsprechen, unter u', v', w' die durch die Ergänzungsglieder geforderten Correctionen, und vernachlässigt die Producte der letzteren in die Zusatzconstanten c'_k, so nehmen die Druckcomponenten die Werthe an

$$X_x=X_x^0+X'_x,\ldots X_y=X_y^0+X'_y,$$

worin die $X_x^0\ldots X_y^0$ die nach den älteren Formeln berechneten Componenten sind und die $X'_x\ldots X'_y$ die Werthe haben:

$$7)\qquad \begin{aligned} -X'_x &= c_1\,\delta'+c_2\,x'_x+c'_1\,\delta^{0^2}+c'_2(x_x^0\,\delta^0+\tfrac{1}{2}\vartheta^0)+c'_3(y_y^0\,z_z^0-\tfrac{1}{4}y_z^{0^2}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -Y'_z &= \tfrac{1}{2}(c_2\,y'_z+c'_2\,y_z^0\,\delta^0+c'_3(\tfrac{1}{2}z_x^0\,x_y^0-x_x^0\,y_z^0)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die $X'_x\ldots X'_y$ haben bei Gleichgewichtsproblemen die Gleichungen (4) und (5) mit verschwindenden $\partial u^2/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$, $\partial^2 w/\partial t^2$, X, Y, Z und $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ zu erfüllen.

Was die speciellen von mir behandelten Probleme anbetrifft, so ändern sich durch die von Herrn Stickelberger herrührende Vervollständigung des Potentiales die Resultate, dank der Eigenschaft der Zusatzglieder, bei ihnen zum großen Theil zu verschwinden, meist nur unbeträchtlich und alle wesentlichen Folgerungen bleiben unverändert bestehen.

In dem Falle der homogenen Deformation treten zu den Werthen der Constanten A, B, C in den Formeln (20) resp. die Glieder $c'_3\,bc$, $c'_3\,ca$, $c'_3\,ab$. Hieraus folgt, daß in den Endformeln für allseitig gleichen Druck nur $c'_1+\frac{1}{2}c'_2+\frac{1}{9}c'_3$ an Stelle von $c'_1+\frac{1}{2}c'_2$ zu setzen ist, analog in der Formel für die longitudinale Dehnung durch einseitigen Zug $[c'_1\,c_2^2+\frac{3}{2}c_2\,c'_2\,(6c_1^2+4c_1\,c_2+c_2^2)+3c'_3\,c_1^2\,(2c_1+c_2)]$ an Stelle von $[c'_1\,c_2^2+\frac{3}{2}c'_2\,(6c_1^2+4c_1\,c_2+c_2^2)]\,c_2$.

Der Nachweis, daß die Ergänzungsglieder des elastischen Potentiales auf die Größe der Drillung und Biegung von Cylindern mit doppeltsymmetrischem Querschnitt keinen Einfluß haben, läßt sich mit der neuen Form genau ebenso führen, wie mit der früheren, und mag daher fortbleiben.

Wünschenswerth erscheint dagegen die wiederholte Ableitung der Torsionsformeln für einen Kreiscylinder, weil dieses Problem möglicherweise für die Beobachtung Bedeutung gewinnen kann, auch wie weiter unten gezeigt werden wird, zu einem interessanten Reciprocitätssatze Veranlassung giebt.

Wie früher ist zur angenäherten Lösung

8) $$x_x^0 = y_y^0 = z_z^0 = x_y^0 = \delta^0 = 0, \quad y_z^0 = \tau x, \quad z_x^0 = -\tau y$$

zu setzen, und die Ergänzungsdrucke $X'_x, \ldots X'_y$ nehmen hierdurch die Werthe an

9) $$\begin{aligned} -X'_x &= c_1\delta' + c_2 x'_x + \tfrac{1}{4}\tau^2(c'_2 r^2 - c'_3 x^2), \\ -Y'_y &= c_1\delta' + c_2 y'_y + \tfrac{1}{4}\tau^2(c'_2 r^2 - c'_3 y^2), \\ -Z'_z &= c_1\delta' + c_2 z'_z + \tfrac{1}{4}\tau^2 c'_2 r^2, \\ -Y'_z &= \tfrac{1}{2}c_2 y'_z, \quad -Z'_x = \tfrac{1}{2}c_2 z'_x, \\ -X'_y &= \tfrac{1}{2}c_2 x'_y - \tfrac{1}{4}\tau^2 c'_y xy. \end{aligned}$$

Zur Integration der Gleichungen (4) und (5) bei Einsetzung dieser Werthe ist zu setzen

10) $$u' = \tau^2 Rx, \quad v' = \tau^2 Ry, \quad w' = \tau^2 Cz,$$

worin R eine Function von $r = \sqrt{x^2+y^2}$ allein und C eine Constante bezeichnet.

Die beiden ersten Hauptgleichungen (4) werden hierdurch gleich und geben falls $dR/dr = R'$ gesetzt wird:

11) $$R''r + 3R' + \frac{r(2c'_2 - 3c'_3)}{4(c_1+c_2)} = 0,$$

die letzte wird identisch erfüllt. Die zwei ersten Bedingungen (5) für die Mantelfläche $r = \varrho$ liefern gleichfalls übereinstimmend

12) $$c_1(\overline{R}'\varrho + 2\overline{R} + C) + c_2(\overline{R}'\varrho + \overline{R}) + \tfrac{1}{4}\varrho^2(c'_2 - c'_3) = 0$$

die letzte ist identisch erfüllt.

Kürzt man ab

13) $$\frac{2c'_2 - 3c'_3}{32(c_1+c_2)} = K$$

und bedenkt, daß R nicht für $r = 0$ unendlich werden darf, so genügt man (11) durch den Ansatz

14) $$R = A + K(\varrho^2 - r^2),$$

worin A eine Constante bezeichnet. Zur Bestimmung von A und C erhält man eine Gleichung aus (12) nämlich

15) $$A(2c_1 + c_2) + Cc_1 + \tfrac{1}{8}\varrho^2(c_2' - \tfrac{1}{2}c_3') = 0,$$

eine zweite liefert die Bedingung, daß auf die Grundflächen nur ein Drehungsmoment N um die Längsaxe, aber keine Componente ausgeübt wird. Dies giebt die Formeln

16) $$\int X_z' dq = \int Y_z' dq = \int Z_z' dq = 0,$$
$$\int xZ_z' dq = \int yZ_z' dq = 0, \ \int (xY_z' - yX_z') dq = N,$$

von denen die erste, zweite, vierte, fünfte identisch erfüllt sind, während die dritte liefert

17) $$A\,2c_1 + C(c_1 + c_2) + \tfrac{1}{8}\varrho^2 c_2' = 0,$$

die sechste aber

18) $$N = \tfrac{1}{4}\pi c_2 \tau \varrho^4.$$

Aus (15) und (17) folgt

19) $$A = -\tfrac{1}{2}\alpha\varrho^2 = -\tfrac{1}{2}\varrho^2 \frac{2c_2 c_2' - (c_1 + c_2)c_3'}{8c_2(3c_1 + c_2)},$$
$$C = -\gamma\varrho^2 = -\varrho^2 \frac{c_2 c_2' + c_1 c_3'}{8c_2(3c_1 + c_2)}.$$

Das Problem der Drillung des Kreiscylinders ist hierdurch gelöst; insbesondere ergiebt sich die eintretende Verkleinerung des Durchmessers 2ϱ zu

20) $$-\delta D = \alpha\tau^2\varrho^3$$

die Verringerung der Länge L zu

21) $$-\delta L = \gamma\tau^2\varrho^2 L. -$$

Wie in der früheren Abhandlung bemerkt, gestattet das erweiterte elastische Potential die Ableitung der Einwirkung, welche eine bestehende constante Deformation auf nachfolgende schwächere übt. Wir wollen dieses Problem wieder aufnehmen und etwas weiter verfolgen.

Hierzu ist abermals

22) $$u = u^0 + u', \quad v = v^0 + v', \quad w = w^0 + w'$$

zu setzen, wo sich u^0, v^0, w^0 auf die primäre, u', v', w' auf die nachfolgende Verrückung bezieht; analog $x_x = x_x^0 + x_x'$, ... $x_y = x_y^0 + x_y'$.

Beschränkt man sich auf die in $x_x' \ldots x_y'$ lineären Glieder, so wird

23) $$X_x = X_x^0 + X_x', \ldots X_y = X_y^0 + X_y'$$

worin $X_x^0 \ldots X_y^0$ die Ausdrücke (3) für die primäre Deformation allein sind, die $X_x' \ldots X_y'$ aber die Werthe besitzen:

24) $$-X_x' = c_{11} x_x' + c_{12} y_y' + c_{13} z_z' + c_{14} y_z' + c_{15} z_x' + c_{16} x_y'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

in denen die Constanten $c_{hk} = c_{kh}$ aus den folgenden speciellen Werthen durch cyclische Vertauschung links der Indices 1, 2, 3 resp. 4, 5, 6 und rechts der Deformationsgrößen x_x', y_y', z_z' resp. y_z', z_x', x_y' zu bilden sind:

25) $$\begin{aligned} c_{11} &= c_1 + c_2 + (2c_1' + c_2')\,\delta^0 + 2c_2' x_x^0, \\ c_{23} &= c_1 + (2c_1' + c_2')\,\delta^0 - (c_2' - c_3')\,x_x^0, \\ c_{44} &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'\delta^0 - c_3' x_x^0), \\ c_{41} &= \tfrac{1}{2}(c_2' - c_3')\,y_z^0, \quad c_{42} = c_{43} = \tfrac{1}{2} c_2' y_z^0, \quad c_{56} = \tfrac{1}{4} c_3' y_z^0. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken kann man für die primären Deformationsgrößen $x_x^0 \ldots x_y^0$ die mit Hülfe des älteren Potentiales berechneten Werthe einsetzen, da dieselben nur in die Ergänzungsconstanten c_k' multiplicirt vorkommen.

Ist die primäre Deformation eine homogene, also

26) $$x_x^0 = a, \quad y_y^0 = b, \quad z_z^0 = c, \quad y_z^0 = z_x^0 = x_y^0 = 0,$$

so verhält sich der deformirte Körper wie ein homogener Krystall rhombischer Symmetrie und gestattet also ebenso, wie jener, die Bestimmung der Gesetze des Gleichgewichts wie der Bewegung von Dehnung, Drillung, Biegung.

Größeres Interesse bieten die Fälle inhomogener primärer Deformation.

Sei der Körper ein Kreiscylinder und primär um seine Axe gedrillt, also $x_x^0 \ldots x_y^0$ wie in (8) bestimmt; dann ist

$$
27)\quad
\begin{aligned}
-X_x' &= c_1\delta' + c_2 x_x' + \tfrac{1}{2}c_2'\tau(xy_z' - yz_x') - \tfrac{1}{2}c_3'\tau xy_z',\\
-Y_y' &= c_1\delta' + c_2 y_y' + \tfrac{1}{2}c_2'\tau(xy_z' - yz_x') + \tfrac{1}{2}c_3'\tau yz_x',\\
-Z_z' &= c_1\delta' + c_2 z_z' + \tfrac{1}{2}c_2'\tau(xy_z' - yz_x'),\\
-Y_z' &= \tfrac{1}{2}(c_2 y_z' + c_2'\tau x\delta' - c_3'\tau(\tfrac{1}{2}yx_y' + xx_x')),\\
-Z_x' &= \tfrac{1}{2}(c_2 z_x' - c_2'\tau y\delta' + c_3'\tau(\tfrac{1}{2}xx_y' + yy_y')),\\
-X_y' &= \tfrac{1}{2}(c_2 x_y' + \tfrac{1}{2}c_3'\tau(xz_x' - yy_z')).
\end{aligned}
$$

Ist die nachfolgende Deformation eine gleichförmige Längsdehnung, also

$$x_x' = y_y' = a', \quad z_z' = c', \quad y_z' = z_x' = x_y' = 0,$$

so übersieht man leicht, daß zwischen a' und c' und der auf die Querschnittseinheit bezogenen Zugkraft P die gleichen Beziehungen stattfinden, als wenn die primäre Drillung garnicht stattgefunden hätte. Abweichend aber ist, daß, um diese Deformation hervorzubringen, außer der Zugkraft noch ein Moment um die Cylinderaxe aufzuwenden ist von dem Betrage

$$28)\qquad N = -\tfrac{1}{4}\tau q\varrho^2(c_2'(2a' + c') - c_3'a'),$$

welches die Befestigung ausüben würde, wenn man das freie Ende des Cylinders durch eine Parallelführung an einer Drehung verhinderte.

Fehlt eine solche Führung, so muß bei der Dehnung der Cylinder neuerdings eine Drillung erfahren, die vielleicht ein Gegenstand der Beobachtung und bei der Bestimmung der Ergänzungsconstanten c_h' nützlich werden kann.

Wir setzen

$$29)\qquad u' = Rx - \tau' yz, \quad v' = Ry + \tau' xz, \quad w' = Cz$$

und verstehen unter τ' eine Constante, unter R eine Function von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann wird

$$
30)\quad
\begin{aligned}
-X_x' &= c_1(2R + R'r + C) + c_2\left(R + R'\frac{x^2}{r}\right) + \tfrac{1}{2}\tau\tau'(c_2'r^2 - c_3'x^2),\\
-Y_y' &= c_1(2R + R'r + C) + c_2\left(R + R'\frac{y^2}{r}\right) + \tfrac{1}{2}\tau\tau'(c_2'r^2 - c_3'y^2),\\
-Z_z' &= c_1(2R + R'r + C) + c_2 C + \tfrac{1}{2}\tau\tau' c_2' r^2,\\
-Y_z' &= \tfrac{1}{2}x(c_2\tau' + c_2'\tau(2R + R'r + C) - c_3'\tau(R + R'r)),\\
-Z_x' &= -\tfrac{1}{2}y(c_2\tau' + c_2'\tau(2R + R'r + C) - c_3'\tau(R + R'r)),\\
-X_y' &= c_2 R'\frac{xy}{r} - \tfrac{1}{2}c_3'\tau\tau' xy.
\end{aligned}
$$

Die beiden ersten Hauptgleichungen (4) werden hierdurch übereinstimmend zu

31) $$3R' + R''r + \tfrac{1}{2}\tau\tau r \frac{2c_2' - 3c_3'}{c_1 + c_2} = 0,$$

welche wie (11) durch

32) $$R = A + H(\varrho^2 - r^2)$$

integrirt wird, falls man

33) $$\frac{\tau\tau'(2c_2' - 3c_3')}{16(c_1 + c_2)}, = H$$

setzt; die entsprechenden Bedingungen (5) für die Mantelfläche $r = \varrho$ geben ähnlich

34) $$c_1(2\overline{R} + \overline{R}'\varrho + C) + c_2(\overline{R} + \overline{R}'\varrho) + \tfrac{1}{2}\tau\tau'\varrho^2(c_2' - c_3') = 0.$$

Die dritte Hauptgleichung und Randbedingung ist identisch erfüllt.

Die Bedingungen für die freie Grundfläche lauten

35) $$\begin{gathered} \int X_z' dq = \int Y_z' dq = 0, \quad \int Z_z' dq = \pi\varrho^2 P, \\ \int x Z_z' dq = \int y Z_z' dq = 0, \quad \int (x Y_z' - y X_z') dq = 0, \end{gathered}$$

von denen nur die dritte und sechste nicht identisch erfüllt sind. Sie liefern mit (34) zusammen die nöthigen drei Gleichungen für A, C und τ_1', nämlich,

36) $$\begin{gathered} A(2c_1 + c_2) + Cc_1 + \tau' \tfrac{1}{8}\tau\varrho^2(2c_2' - c_3') = 0, \\ A(2c_2' - c_3') + Cc_2' + \tau' \tfrac{1}{8}\tau\varrho^2\left(\frac{8c_2}{\tau^2\varrho^2} - \frac{(2c_2' - 3c_3')^2}{6(c_1 + c_2)}\right) = 0, \\ A\,2c_1 + C(c_1 + c_2) + \tau' \tfrac{1}{8}\tau\varrho^2\, 2c_2' = P. \end{gathered}$$

Die resultirenden s t r e n g e n Werthe sind ziemlich complicirt, dürften aber in praxi auch nicht nöthig sein. Vernachlässigt man $(c_h'\tau\varrho/c_h)^2$ neben Eins, so erhält man für A und C die Werthe, die sich bei dem primär nicht gedrillten Cylinder für die Quer- und Längsdilatation finden, nämlich

37) $$A = -\frac{c_1 P}{c_2(3c_1 + c_2)}, \quad C = +\frac{(2c_1 + c_2)P}{c_2(3c_1 + c_2)}.$$

Dagegen findet sich

38) $$\tau' = -\frac{(c_2 c_2' + c_1 c_3') P\tau}{c_2^2 (3c_1 + c_2)},$$

oder bei Einführung der Constante γ aus (19)

39) $$\tau' = -\frac{8\gamma P\tau}{c_2}.$$

Diese Formel combinirt mit (19), enthält den oben erwähnten Reciprocitätssatz:

Je nachdem ein Kreiscylinder aus bestimmter Substanz sich bei der Torsion verlängert oder verkürzt, bewirkt an ihm eine Längsdehnung eine Vermehrung oder Verminderung einer primären Drillung.

Was die longitudinalen Schwingungen eines primär tordirten Kreiscylinders betrifft, so kann man sie unter Voraussetzung eines gegen die Wellenlänge verschwindenden Querschnittes leicht behandeln.

x_x', y_y', z_z' sind hier ungerade Functionen von x und y, y_z', z_x', x_y' können Null gesetzt werden. Führt man den mittleren Werth einer Function $\varphi\,(x, y)$ auf dem Querschnitt q des Cylinders mit der Bezeichnung (φ) ein, so ergiebt das System (4) nach Integration über den Querschnitt und unter Rücksicht auf die für die Mantelfläche geltenden Bedingungen (5)

40) $$\frac{\partial^2 (u)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (v)}{\partial z^2} = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 (w)}{\partial z^2} = -\frac{\partial (Z_z')}{\partial z} = c_1 \frac{\partial (\delta')}{\partial z} + c_2 \frac{\partial (z_z')}{\partial z}.$$

Um die ersten beiden Grenzbedingungen (5) für die Mantelfläche zu erfüllen, kann man widerspruchslos auf dem ganzen Querschnitt

$$c_2 x_x' = c_2 y_y' = -c_1 \delta'$$

setzen, während die dritte durch die Werthe von Y_z' und Z_x' in (27) bei verschwindenden y_z', z_x', x_y' identisch erfüllt ist. Hierdurch gelangt man also zu

41) $$\varepsilon \frac{\partial^2 (w)}{\partial z^2} = \frac{c_2 (3c_1 + c_2)}{2c_1 + c_2} \frac{\partial^2 (w)}{\partial z^2},$$

welche Gleichung von der primären Deformation gänzlich unabhängig ist. —

Soll die der primären Drillung folgende Deformation eine gleichförmige Biegung sein, so ist

$$x_x' = y_y' = 2a'x, \quad z_z' = 2c'x, \quad y_z' = z_x' = x_y' = 0$$

zu setzen, woraus resultirt

$$
\begin{aligned}
-X'_x &= 2x\,(c_1\,(2a'+c')+c_3\,a') = -Y'_y,\\
-Z'_z &= 2x\,(c_1\,(2a'+c')+c_2\,c'),\\
-Y'_z &= \tau x^2\,(c'_2\,(2a'+c')-c'_3\,a'),\\
-Z'_x &= -\tau xy\,(c'_2(2a'+c')-c'_3\,a'),\\
-X'_y &= 0.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Diese Werthe zeigen, daß zur Erzielung einer solchen gleichförmigen Biegung zwar, wenn $c_1(2a'+c')+c_2\,a' = 0$ ist, keine äußere Kraft parallel zu X oder Y, wohl aber eine parallell zu Z erforderlich ist; denn die dritte Hauptgleichung (4) liefert hier

$$+\varepsilon Z = \tau y\,(c'_2\,(2a'+c')-c'_3\,a') = -\frac{\tau y a'}{c_1}(c_2\,c'_2+c_1\,c'_3).$$

Drucke gegen die Mantelfläche sind nicht erforderlich, wohl aber gegen die Grundflächen außer den sonst nöthigen Momenten um die Y-Axe Componenten parallel zu Y; denn es ist, falls k_y den Trägheitsradius des Querschnitts um die Y-Axe bezeichnet

$$
\begin{aligned}
-\int Y'_z\,dq &= \tau q k_y^2\,(c'_2\,(2a'+c')-c'_3\,a'),\\
&= -\frac{\tau q k_y^2\,a'}{c_1}(c_2\,c'_2+c_1\,c'_3).
\end{aligned}
$$

Hieraus ist zu folgern, daß bei dem primär gedrillten Cylinder durch Drehungsmomente um die Y-Axe nicht blos eine Biegung in der XZ-Ebene bewirkt wird, sondern gleichzeitig auch eine Ausweichung nach der YZ-Ebene hin; überdies können die so hervorgebrachten Biegungen nicht gleichförmig sein. —

Ganz ähnliche Betrachtungen wie auf den primär gedrillten lassen sich auf den primär gleichförmig gebogenen Stab anwenden. Hier ergiebt sich z. B. daß ein Moment um die Längsaxe nicht nur eine Drillung, sondern auch eine Biegung bewirkt u. s. f. Die strenge Behandlung dieser Art von Vorgängen dürfte erhebliche Schwierigkeiten bieten.

Göttingen, Januar 1894.

Einige Beobachtungen über die Festigkeit von Glasstäben.

Von

C. Brodmann.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 3. Februar 1894.

Die im hiesigen physikalischen Institut vor Jahren angestellten v. Kowalski'schen Untersuchungen über die Festigkeit von Glasstäben[1]) hatten ergeben, daß bei Dehnung und Biegung die Werthe der Grenzspannung identisch würden, daß aber die Torsion sowohl für Grenzspannung als — Dilatation einen abweichenden Werth lieferte.

Dieses Resultat widerspricht sowohl den Erfahrungen der Technik an Materialien wie Eisen etc., als den Beobachtungen des Herrn Voigt[2]) an Krystallstäben, denen zu Folge bei der Biegung der Werth der Grenzspannung fast auf das Doppelte der für Dehnung geltenden steigen kann.

Ferner war den an den Krystallstäben gewonnenen Erfahrungen gegenüber die enge Uebereinstimmung, welche Herrn v. Kowalski's Beobachtungen unter sich zeigten, schwer verständlich.

Die drei mir bekannten älteren Arbeiten über Cohäsionseigenschaften des Glases[3]) sind nicht geeignet, über die hier zunächst interessirenden Fragen Aufschluß zu geben.

---

1) J. v. Kowalski, Festigkeit des Glases. Wied. Ann. 36, pag. 307, 1889.

2) A. Sella und W. Voigt, Zerreissungsfestigkeit von Steinsalz. Gött. Nachr. Nr. 14, 1892, pag. 494. — W. Voigt, Drillungsfestigkeit von Steinsalz. Ibid. Nr. 2, 1893, pag. 91. — W. Voigt, Zerreissungsfestigkeit von Bergkrystall und Flußspath. Ibid. Nr. 2, 1893, pag. 96.

3) Chevandier et Wertheim, Elasticité et Cohesion des différentes espèces de verre. Ann. de Chim. et Phys. III. S. V. 19, pag. 129, 1847. — Wertheim, Mém. sur la Torsion. Ibid. III. S. V. 50, pag. 269. — Fairbairn and Tate, Resist. of Glass globes etc. Lond. Phil. Trans. Vol. 149, pag. 213, 1859.

Da sich überdieß in den v. Kowalski'schen Tabellen eine Reihe Rechenfehler vorfanden, deren Verbesserung seine Resultate einigermaßen modificiren würde, so erschien deren Zuverlässigkeit soweit erschüttert, daß eine Wiederholung der wesentlichsten Versuchsreihen seiner Arbeit rathsam wurde.

Die neuen Beobachtungen konnten dabei an den noch vorhandenen Resten des alten Materiales angestellt werden.

Die Stäbchen wurden durch Dehnung, durch Biegung und durch Torsion zerbrochen.

I. Untersuchung der Dehnungsfestigkeit.

Hier, wie auch bei den folgenden Beobachtungen wurden die in den oben citirten Arbeiten des Herrn Voigt niedergelegten Erfahrungen möglichst ausgiebig zu Rathe gezogen.

Die Messingfassungen, in welche die Enden der zu zerreissenden Stäbchen mit Siegellack eingekittet wurden, waren genau nach der in den Gött. Nachr. Nr. 14 von 1892, pag. 497 gegebenen Beschreibung hergestellt. Es stand eine ganze Reihe derselben mit wechselnder Weite der Bohrung zur Verfügung, so daß für die verschiedenen Stabdicken stets eine gut passende ausgewählt werden konnte.

Centrische Belastung war somit möglichst gesichert.

Die freie Länge des Stäbchens zwischen den Fassungen betrug 15–20 mm.

Die Belastung wurde durch den erschütterungsfreien Zufluß von Quecksilber bis zum Bruch des Stäbchens gesteigert.

Hier zeigte sich zunächst eine gewisse Schwierigkeit.

Bei dem großen Betrage der Bruchbelastung (25—35 Kilo) und bei der beträchtlichen Schwankung, welche dieser Betrag von Stäbchen zu Stäbchen erfuhr, war es schwierig, die Anfangsbelastung so zu wählen, daß einmal das Stäbchen nicht etwa unter ihrer Einwirkung beim Anhängen schon zerriß, wozu die bei der Manipulation unvermeidlichen Erschütterungen leicht beitrugen, und daß andrerseits die in Quecksilber zur Verfügung stehende Zusatzbelastung von 10 Kilo zum Zerbrechen hinreichte. Ferner war, auch wenn diese Bedingungen erfüllt waren, die zum Ueberströmen einer solchen Quecksilbermenge erforderliche Zeit so bedeutend, daß die Befürchtung nahe lag, die hierdurch bedingte Vermehrung der Versuchsdauer möchte das Resultat beeinflussen.

Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, wurde bei einer zweiten Versuchsreihe ein Hebel angewandt, welcher eine im Verhältniß 1 : 5 verkleinerte Belastung zu benutzen gestattete.

Eine Eisenstange von 55 cm Länge trug zwei Stahlschneiden; die eine 5 cm. vom Ende entfernt mit nach oben gerichteter Schärfe, die zweite 15 cm. vom selben Ende mit der Schärfe nach unten. Die zu beiden Seiten der Eisenstange herausragenden Hälften der letzteren legten sich in zwei von einer Messinggabel getragene gehärtete Lager. Die Gabel faßte mit zwei Oesen in ihrer oberen Hälfte einen Knebel, der durch den Bügel der unteren Fassung des Stäbchens hindurch ging. Die obere Fassung wurde mit Hilfe einer kleineren Gabel und eines ähnlichen Knebels mit einer Schraubenspindel verbunden, welche man durch Drehen einer Mutter auf und ab bewegen konnte.

War ein Stäbchen eingesetzt, so wurde diese Spindel angezogen. Dadurch wurde der am Stäbchen hängende Hebel gehoben, bis sich die zweite Schneide in zwei, von einer mit der Wand fest verschraubten Eisengabel getragene Lager einlegte. Bei weiterem Anziehen der Spindel drehte sich dann der Hebel um diese Schneide und sein vorderes Ende, welches bis dahin gestützt gewesen war, wurde frei.

Der Hebel war an diesem vorderen Ende mit einer quer verlaufenden Einkerbung versehen, in welche sich der die Belastungsschale tragende Bügel einlegte. Der Bügel war 40 cm von der Mittelschneide entfernt. So erreichte man in der That, daß ein Gewicht p auf der Belastungsschale das Stäbchen mit einer Kraft $5\,p$ dehnte.

Um die von dem Hebelgewicht allein herrührende Zugkraft zu bestimmen, und um das Verhältniß der Hebelarme zu controliren, wurde mittels der vorerwähnten Messinggabel die Mittelschneide an einen Wagebalken angehängt und durch Belastung des anderen Armes dieses Balkens direct die Kraft gemessen, welche bei verschiedener Beschwerung der Belastungsschale die Mittelschneide erfuhr.

So ergab sich die von dem Hebelgewicht allein herrührende Kraft zu 9,24 Kilo. Das Vergrößerungsverhältniß war sehr genähert gleich 5 : 1. Die Empfindlichkeit des ganzen Systemes gegen Aenderung der Belastung erwies sich als genügend, um in allen Fällen eine 1 % weit überschreitende Genauigkeit in der Bestimmung der auf die Mittelschneide wirkenden Kraft zu garantiren.

Bei der Beobachtung ließ man einen am vorderen Hebelende angebrachten Zeiger auf einer Verticalskala spielen und hob den Hebel immer so weit, daß dieser Zeiger sich auf die bei den Kraftmessungen angenommene Nulllage einstellte.

Die ganze Anordnung gestattete ein sehr bequemes und schnelles Arbeiten und der Erfolg zeigte sich in einer merklichen Erhöhung der durchschnittlichen Grenzspannung.

Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle I zusammengestellt, und zwar unter A diejenigen, welche ohne den Hebel bei directer Belastung, unter B die, welche bei Anwendung des Hebels gefunden waren. Dabei sind a und b die beiden Halbaxen des als elliptisch angenommenen Querschnittes in mm. Sie wurden mit demselben Fühlhebelniveau gemessen, welches Herr v. Kowalski benutzt hatte. P giebt die gesammte dehnende Kraft, die in der Tabelle I B aus der am Hebel hängenden Last p nach der Gleichung $P = 5p + 9{,}24$ berechnet wurde. $\overline{p}$ endlich giebt die auf 1 mm² berechnete Druckkraft im Augenblick des Zerreißens, also die Grenzspannung.

Tabelle I.

Dehnungsfestigkeit.

A. Versuche mit directer Belastung.

No.	a	b	$ab\pi$	P	$\overline{p}$
1.	0,811	0,811	2,07	18,72	9,04
2.	0,909	0,909	2,60	23,76	9,14
3.	0,843	0,843	2,23	16,75	7,50
4.	0,831	0,831	2,16	16,68	7,72
5.	0,840	0,840	2,21	18,36	8,30
6.	0,891	0,891	2,48	21,49	8,66
7.	0,896	0,896	2,52	18,37	7,28
8.	0,856	0,899	2,40	15,91	6,64
9.	0,881	0,916	2,54	22,00	8,66
10.	0,942	0,905	2,66	25,65	9,63
11.	0,948	0,910	2,71	22,93	8,45
14.	0,905	0,865	2,46	25,38	10,58
15.	0,930	0,900	2,63	23,10	8,78
16.	0,916	0,880	2,53	22,29	8,81
17.	0,943	0,907	2,69	30,19	11,21
18.	0,946	0,911	2,71	25,88	9,56
19.	0,920	0,894	2,58	27,60	10,69
20.	0,906	0,876	2,50	23,70	9,50
21.	0,891	0,855	2,40	27,92	11,66
22.	0,881	0,846	2,34	22,32	9,54
23.	0,949	0,911	2,72	26,61	9,81
24.	0,952	0,913	2,74	26,05	9,54
25.	0,891	0,877	2,45	24,12	9,84
26.	0,949	0,900	2,68	32,08	11,90
27.	0,911	0,861	2,46	21,24	8,62
28.	0,905	0,855	2,43	28,67	11,79
29.	0,909	0,860	2,45	25,19	10,28
30.	0,930	0,890	2,60	30,00	11,54
31.	0,906	0,869	2,48	30,91	12,49
32.	0,905	0,866	2,46	24,50	9,94

Im Mittel $\overline{p} = 9{,}57$.

B. Versuche mit dem Zerreißhebel.

No.	a	b	$ab\pi$	p	P	$\overline{p}$
1.	0,895	0,844	2,36	4,119	29,83	12,65
2.	0,885	0,840	2,34	4,322	30,85	13,22
3.	0,896	0,851	2,40	3,309	25,78	10,76
4.	0,894	0,849	2,38	3,464	26,56	11,12
5.	0,914	0,879	2,52	3,312	25,80	10,23
6.	0,875	0,839	2,30	3,217	25,32	10,99
7.	0,920	0,894	2,59	4,749	32,98	12,71
8.	0,899	0,864	2,44	5,001	34,24	14,06
9.	0,920	0,880	2,54	5,179	35,13	13,79
10.	0,915	0,876	2,52	3,526	26,87	11,71
11.	0,926	0,886	2,58	5,145	34,96	13,53
12.	0,949	0,925	2,75	3,092	24,70	8,98
13.	0,936	0,897	2,64	3,949	28,98	10,98
14.	0,894	0,857	2,41	3,355	26,23	10,90
15.	0,899	0,871	2,46	3,261	25,54	10,39
16.	0,918	0,878	2,53	4,170	30,09	11,89
17.	0,931	0,895	2,62	4,077	29,62	11,31
18.	0,924	0,885	2,56	4,688	32,68	12,78
19.	0,926	0,889	2,59	4,308	30,78	11,90
20.	0,929	0,890	2,60	4,035	29,41	11,33
21.	0,931	0,894	2,62	4,135	29,91	11,41
22.	0,880	0,830	2,29	4,836	33,42	14,58
23.	0,875	0,825	2,27	2,952	24,00	10,58
24.	0,870	0,817	2,24	3,955	29,01	13,01
25.	0,881	0,830	2,30	3,045	24,46	10,64
26.	0,880	0,829	2,29	4,385	31,16	13,59
27.	0,841	0,804	2,12	3,380	26,14	12,30
28.	0,911	0,869	2,48	3,720	24,84	10,00
29.	1,072	1,039	3,50	8,810	53,29	15,21
30.	1,087	1,056	3,60	7,56	47,04	13,08
31.	1,052	1,025	3,40	4,887	33,67	9,91
32.	1,034	1,011	3,30	5,665	37,56	11,40
33.	1,018	0,994	3,18	5,085	34,66	10,90
34.	1,030	1,008	3,26	5,690	37,69	11,58
35.	1,063	1,020	3,42	8,110	49,79	14,58
36.	1,056	1,011	3,36	6,025	39,36	11,71
37.	0,840	0,779	2,06	2,790	23,19	11,27
38.	0,757	0,712	1,70	2,155	20,01	11,88
39.	0,785	0,751	1,86	3,485	26,66	14,40
40.	0,785	0,751	1,86	2,345	20,96	11,30
41.	0,804	0,767	1,94	3,082	24,65	12,71
42.	0,814	0,774	1,98	1,687	17,67	8,91
43.	0,752	0,705	1,67	1,945	18,96	11,39

Im Mittel $\overline{p} = 11{,}90$.

Die Tabelle zeigt zunächst, daß eine derartige Uebereinstimmung der Resultate, wie sie die v. Kowalski'sche Arbeit aufweist, hier nicht vorhanden ist. In jener schwanken die Werthe für $\overline{p}$ (c genannt) zwischen 8,98 und 8,65, also nur um etwas über 3 %.

Ferner ergeben meine Beobachtungen einen merklich größeren Werth für die Grenzspannung: 9,57 resp. 11,90 in Tabelle I A und I B, während die ältere Arbeit 8,77 im Mittel findet.

Trotz der größeren Schwankungen, die meine Beobachtungen aufweisen, muß ich ihr Resultat für zuverlässiger als das ältere ansehen, insbesondre das in Tabelle I B enthaltene. Der kleinere Werth, den Herr v. Kowalski gefunden hat, erklärt sich wohl ähnlich, wie die Differenz der von mir in Tabelle I A und B gefundenen: je erschütterungsfreier man im Stande war die Anfangsbelastung anzuhängen und je prompter sich die Steigerung bis zur Bruchbelastung vollzog, um so größer fielen im Mittel die Werthe der letzteren aus.

Dazu kommt, daß bei meinen Beobachtungen durch die Gestalt der Fassungen eine größere Garantie für exact centrale Belastung gegeben war, und daß der Zufluß von Quecksilber viel regelmäßiger und sanfter vor sich gehen mußte, als das Belasten mit Schrot, wie es Herr v. Kowalski anwandte.

II. Untersuchung der Biegungsfestigkeit.

Abweichend von der v. Kowalski'schen Anordnung wurden hier die Stäbchen durch eine Biegung „mittels auf die Enden derselben ausgeübte Drehmomente um eine zur Längsrichtung normale Axe[1])“ zerbrochen. Auf ihre Enden wurden zwei etwa 86 mm lange Messingfassungen mit Siegellack aufgekittet, so daß das freie Stück ungefähr 40 mm lang war. Das Stäbchen wurde dann auf zwei etwa 20 mm von einander entfernte Messingschneiden so aufgelegt, daß der größere Durchmesser des Querschnittes horizontal war. Um eine größere Stabilität zu erzielen, hatten die Schneiden in ihrer Mitte einen stumpfen Ausschnitt, in den das Stäbchen sich einlegte. Die Enden der Fassungen trugen an zwei gleich langen Dräthen einen Holzstab mit der Belastungsschale in der Mitte.

Nennt man a die verticale, b die horizontale Axe des Querschnittes, M das auf die Endflächen ausgeübte Drehmoment, so ist der maximale Werth der elastischen Druckkräfte im höchsten Punkt des mittleren Querschnittes vorhanden:

$$-Z_z = \frac{4M}{a^2 b\pi} = \bar{p}.$$

Nennt man P das Gewicht der Belastungsschale (p) vermehrt um dasjenige des Balkens und seiner Aufhängedräthe (13,9 gr),

1) W. Voigt, Zerreissungsfestigkeit von Bergkrystall und Flußspath. Gött. Nachr. No. 2, 1893, pag. 98.

l den (beiderseits gleichen) Abstand des Messingträgers von dem innern Ende der Fassung, so hat man, da der Abstand dieses innern Endes von der Oese, an welcher der den Balken tragende Drath angreift, gleich 84,5 mm war, für das Moment, soweit es von dem Gewicht P herrührt, den Werth

$$M = \frac{P}{2}(84{,}5 + l).$$

Hierzu addirt sich das durch die Fassungen bedingte Moment μ.

Der Gewicht derselben war je 29,2 gr. Ihr Schwerpunkt war von ihrem innern Ende entfernt 33,5 mm, μ wird daher gleich 0,0292 (33,5 + l) Kgr. mm werden.

Der Bruch der Stäbchen erfolgte meistens im freien Theile und zeigte eine charakteristische und mit beinahe ausnahmsloser Regelmäßigkeit sich wiederholende Gestalt: zwischen zwei unter 45° gegen die Verticale geneigten Ebenen, welche die unversehrten Stabenden abgrenzten, war die obere Hälfte des Stäbchens auf eine Länge von 10—15 mm völlig abgesplittert. Die horizontale Fläche, welche die mit den Enden in Verbindung gebliebene untere Hälfte des Mittelstückes begrenzte, zeigte muscheligen Bruch.

Die Resultate der Versuche giebt Tabelle II.

Tabelle II.

Biegungsfestigkeit.

No.	a	b	$a^2 b \pi$	l	p	μ	M	$M + \mu$	$\overline{p}$
1.	09,01	0,911	2,32	9,8	106,7	1,263	5,69	6,95	11,98
2.	0,899	0,923	2,34	9,3	103,7	1,250	5,51	6.76	11,56
3.	0,8245	0,860	1,83	9,3	95,5	1,250	5,14	6.39	13,91
4.	0,850	0,879	1,99	9,9	73 1	1,268	4,10	5,37	10,80
5.	0,855	0,895	2,05	9,1	122,6	1,245	6,40	7,64	14,90
6.	0,892	0,929	2,31	11,0	99,8	1,300	5,44	6,74	11,67
7.	0,915	0,946	2,49	9,7	175,2	1,261	8,92	10,18	16,33
8.	0,805	0,835	1,70	9,1	81,3	1,245	4,46	5,70	13,40
9.	0,838	0,804	1,77	9,5	97,2	1,254	5,24	6,49	14,61
10.	0,891	0,923	2,30	9,8	140,8	1,263	7,30	8,56	14,89
11.	0,910	0,930	2,42	9,7	116,2	1,261	6,14	7,40	12,21
12.	0,910	0,945	2,61	9,7	145,8	1,261	7,52	8,78	13,47
13.	0,899	0,901	2,28	9,1	135,9	1,245	7,00	8,24	14,46
14.	0,891	0,910	2,27	9,6	112,7	1,260	5,95	7,21	12,71
15.	0,843	0,879	1,96	9,6	132,9	1,260	6,90	8,16	16,69
16.	0,860	0,885	2,05	9,3	112,1	1,250	5,90	7,15	13,96
17.	0,911	0,948	2,46	9,6	130,1	1,260	6,77	8,03	13,06
18.	0,934	0,960	2,63	9,7	119,0	1,261	6,26	7,52	11,45
19.	0,916	0,947	2,49	9,6	167,1	1,260	8,52	9,78	15,70
20.	0,895	0,905	2,27	10,3	109,3	1,279	5,84	7,12	12,55
21.	0,880	0,916	2,22	10,1	140,0	1,272	7,29	8,56	15,42
22.	0,855	0,896	2,05	10,5	101,5	1,283	5,49	6,77	13,21

No.	a	b	$a^2b\pi$	l	p	μ	M	$M+\mu$	$\overline{p}$
24.	0,855	0,895	2,05	10,4	99,2	1,280	5,37	6,65	12,99
25.	0,861	0,906	2,11	8,9	102,4	1,238	5,44	6,68	12,68
26.	0,878	0,934	2,25	10,1	100,8	1,272	5,43	6,70	11,90
27.	0,885	0,949	2,33	9,5	92,4	1,254	5,00	6,25	10,71
28.	0,890	0,956	2,37	9,0	100,3	1,242	5,34	6,58	11,10
29.	0,900	0,948	2,40	10,4	122.3	1,280	6,46	6,74	11,22
30.	0,769	0,799	1,48	9,0	63,5	1,242	3,62	4,86	13.19
31.	0,801	0,834	1,68	9,6	40,5	1,260	2,56	3,82	9,10
32.	0,800	0,824	1,65	9,1	79,1	1,245	4,35	5.59	13,55
33.	0,769	0,800	1,47	9,0	51,0	1,242	3,04	4,28	11,64

Mittel der 32 Versuche $\overline{p} = 13{,}47$.

Gegenüber dem v. Kowalski'schen Resultate fällt wieder erstens die geringere Uebereinstimmung der Werthe unter sich und zweitens der erheblich größere Betrag des Mittels auf. Die abweichende Versuchsanordnung der älteren Arbeit, bei welcher die Stäbchen durch Belastung in der freien Mitte zerbrochen wurden, erklärt die Abweichung der Mittelwerthe nicht, denn einige zur Controle nach jener Methode angestellten Versuche gaben noch etwas höhere Werthe für die Grenzspannung.

Außerdem scheint die bei Herrn v. Kowalski pag. 316 abgedruckte Tabelle durch zahlreiche Rechenfehler entstellt zu sein, so daß eine große Anzahl der herausgerechneten Grenzspannungen zu klein gerathen sind. So würde z. B. No. 1 der Tabelle nach meiner Rechnung für R (unser $\overline{p}$) ergeben 9,13, während die Tabelle 8,79 hat, No. 28 liefert $R = 9{,}48$ statt 8,86 etc.

Da fast sämmtliche Fehler im Sinne einer Verkleinerung von R gewirkt haben, so würde ihre Verbesserung nicht nur die enge Uebereinstimmung der v. Kowalski'schen Resultate unter einander vermindern, sondern auch ein meinen Werthen etwas näher kommendes Mittel liefern.

III. Untersuchung der Torsionsfestigkeit.

Hier wurde die Anordnung völlig entsprechend der von Herrn Voigt bei der Drillung von Steinsalzprismen angewandten gewählt. Die Stäbchen wurden in zwei Fassungen eingekittet, sodaß das freie Stück 15—20 mm lang war. Hinsichtlich der übrigen Anordnung kann ich auf die Beschreibung in der erwähnten Abhandlung (Gött. Nachr. No. 2 von 1893, pag. 93) verweisen. Die Stäbchen zerbrachen im Freien, doch setzte der Bruch sich sehr häufig bis an den Rand der Fassungen fort, ohne daß dabei die Festigkeit verringert schien. Die Splitter, in welche ein ziemlich bedeutendes Stück der freien Mitte zersprengt wurde, waren spiralig

begrenzt, wie dies auch Herr v. Kowalski beschreibt. Die Form der Stümpfe entsprach völlig der von Wertheim in dem oben citirten Mém. sur la Torsion gegebenen Abbildung.

Die Maximalspannung tritt ein an dem Ende der kleinen Axe b und ist unter 45° gegen die Längsrichtung des Stäbchens geneigt. Bezeichnet N das auf das Stabende ausgeübte Drehmoment, so wird sie

$$\bar{p} = \frac{2N}{ab^2\pi}.$$

Da der Radius der Torsionsrolle gleich 40 mm war, so findet man das Moment N, wenn man das um das Gewicht des Tragbalkens (13 gr) vermehrte Belastungsgewicht p mit 40 multiplicirt.

Meine Resultate giebt Tabelle III.

Tabelle III.

Torsionsfestigkeit.

No.	a	b	$ab^2\pi$	p	$\bar{p}$
1.	0,875	0,859	2,02	292,8	11,98
2.	0,890	0,851	2,02	245,5	10,01
3.	0,911	0,872	2,17	320,0	12,11
4.	0,880	0,840	1,94	312,1	13,22
5.	0,950	0,905	2,44	281,9	9,55
6.	0,942	0,896	2,38	346,0	11,98
7.	0,946	0,900	2,40	346,5	11,90
8.	0,907	0,868	2,13	280,1	10,84
9.	0,900	0,864	2,11	317,0	12,34
10.	0,905	0,865	2,12	286,7	11,18
11.	0,897	0,860	2,08	289,1	11,44
12.	0,962	0,915	2,53	358,0	11,60
13.	0,905	0,864	2,12	296,9	11,56
14.	0,865	0,830	1,87	300,0	13,26
15.	0,865	0,830	1,87	290,0	12,84
16.	0,870	0,835	1,90	344,0	14,82
17.	0,911	0,880	2,22	346,0	12,82
18.	0,895	0,860	2,08	396	15,60
19.	0,940	0,899	2,38	303	10,48
20.	0,922	0,884	2,26	330	12,00
21.	0,930	0,910	2,41	391	12,57

Im Mittel $\bar{p}$ = 12,11 Kilo.

Vergleicht man sie mit den v. Kowalski'schen, so kann man nur das bei Gelegenheit der Biegungsversuche Gesagte wiederholen: in jener Arbeit erscheint die Uebereinstimmung besser und der Mittelwerth kleiner als bei mir.

Indessen scheinen auch hier eine Reihe von Rechenfehlern mit untergelaufen zu sein, deren Verbesserung die beiden Mittelwerthe einander näher bringen würde. Ich nenne No. 11, wo $s_t = \bar{p} = 11{,}57$ statt 10,15 stehen müßte; ferner No. 22 $s_t = 11{,}37$ statt 9,98.

Um das allgemeine Resultat meiner Beobachtungen übersehen zu lassen gebe ich eine Zusammenstellung der nach den drei Methoden gefundenen Mittel- und Maximalwerthe der Grenzspannungen und Dilatationen. Die zur Berechnung der letzteren nothwendige Bestimmung der Biegungs- und Torsionsconstante war nach bekannten Methoden ausgeführt und hatte die von den v. Kowalskischen wenig abweichenden Werthe $\Delta = 0{,}000151$, $\mu = 2777$ ergeben.

Wenn wir neben dem Mittel- noch den Maximalwerth in Betracht ziehen, so erscheint dies durch den Umstand gerechtfertigt, daß bei der hier vorliegenden Art von Beobachtungen die überwiegende Mehrzahl aller Fehlerquellen eine Verkleinerung des Werthes der Grenzspannung bedingen muß. Das Gewicht der für diese Größe gefundenen Werthe nimmt also mit diesen sehr zu; der Maximalwerth erscheint als am wenigsten von zufälligen Fehlern, als oberflächlichen Beschädigungen, Excentricität des Zuges etc. beeinflußt.

Wir erhalten so für Grenzspannung $\bar{p}$ und Grenzdilatation $\bar{s}$ folgende Zusammenstellung.

1. Bei einseitigem Zug (Tab. I B)
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 14,58, $\bar{s}$ 0,00221.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 11,90, $\bar{s}$ 0,00180.
2. Bei Biegung durch Momente
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 16,69, $\bar{s}$ 0,00253.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 13,47 $\bar{s}$ 0,00204.
3. Bei Torsion
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 15,60, $\bar{s}$ 0,00281.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 12,11, $\bar{s}$ 0,00218.

Diese Tabelle zeigt sofort, daß das wesentlichste und überraschendste Resultat der älteren Arbeit durch meine Beobachtungen nicht bestätigt wird. Herr v. Kowalski hatte gefunden, daß Biegung und Dehnung für die Grenzspannung auf denselben Werth führen, daß Torsion dagegen für Spannung und Dilatation einen größeren Werth ergiebt. Dagegen stehen bei mir Biegung

und Dehnung einander nicht näher, als Biegung und Torsion. Die Grenzspannung steigt vielmehr ziemlich gleichmäßig an, wenn man von der Dehnung über Torsion zu Biegung fortschreitet, die Grenzdilatationen wachsen in der Reihenfolge Dehnung, Biegung, Torsion.

Die in der technischen Festigkeitslehre sehr bekannte Thatsache, daß Biegungsversuche für die Grenzspannung ziemlich bedeutend größere Werthe zu geben pflegen als Dehnungsversuche, eine Thatsache, die wie schon bemerkt, durch die Versuche der Herren Voigt und Sella an Steinsalz bestätigt wird, findet sich nur schwach angedeutet.

Irgend welche weitere Schlüsse aus den erhaltenen Zahlen ziehen zu wollen, erscheint bei der großen Unsicherheit, welche den Beobachtungen anhaftet, als bedenklich. Jedenfalls liefern die Zahlen keine Anhaltspunkte zur Entscheidung der Frage, ob Grenzspannung nach Clebsch oder — Dilatation nach St. Vénant das für den Bruch maßgebende ist.

Dagegen findet sich eine andere Theorie des Bruches in offenbarem Widerspruch mit unseren Resultaten: die stress difference-Theorie der Engländer.

Thomson und Tait geben in der Natural Philosophy pag. 832 nach dem Vorgange von Darwin als Bedingung des Bruches an, die Differenz zwischen größter und kleinster Hauptdruckkraft müsse an den gefährdeten Punkten einen gewissen Maximalbetrag erreichen. Nun wird diese „Druckdifferenz“ im Falle der Dehnung und Biegung einfach gleich der Grenzspannung, im Falle der Torsion, wo beide Hauptdruckkräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, wird sie gleich der doppelten Grenzspannung.

Das völlige Versagen dieser Theorie in unserem Falle, wie es ein Blick in unsere Tabelle ergiebt, ist um so bemerkenswerther, als die von Herrn Voigt[1]) kürzlich veröffentlichten Zerreißversuche im Piezometer mit ihr gut im Einklang stehen.

Die starken Schwankungen der Versuchsresultate finden vielleicht zum Theil ihre Erklärung durch eine eigenthümliche Beobachtung, welche auf einen innigen Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit und Festigkeit der Stäbchen hindeutet. Bereits die oben citirten Versuche der Herren Voigt und Sella hatten einen derartigen Zusammenhang nachgewiesen. Um zu versuchen, ob bei den Glasstäben etwas Aehnliches sich vorfände, wurden einige derselben mittels gewöhnlicher käuflicher Glasätz-

1) W. Voigt, Festigkeit bei homogener Deformation. Gött. Nachr., Nr. 13, 1893, pag 521.

tinte an der Oberfläche matt geätzt und dann durch Biegung zerbrochen. Es zeigte sich, daß die Grenzspannung auf etwa den doppelten Werth gestiegen war.

Die weitere Verfolgung dieser Beobachtung ergab folgende Resultate: Die Bedingung für das Eintreten der „Verfestigung“ war die Anwendung einer Lösung, welche die Glasoberfläche merklich angriff. Das Mattätzen beruht nach den chemischen Handbüchern darauf, das sich auf der Glasoberfläche Krystalle von Kieselfluorcalcium und -alkali niederschlagen, während zwischen diesen die im Bade vorhandene freie Flußsäure tief einätzt. Man konnte nun aus Fluorammonium und Schwefelsäure ein Bad bereiten, in welchen sich die Glasstäbe schnell mit einer mattweißen Schicht dieser Krystalle überzogen, ohne daß eine Verfestigung eintrat. Ein Zusatz von wässeriger Flußsäure zum Bade ließ den Krystallüberzug wie vorher auftreten, ergab aber gleichzeitig Verfestigung.

Umgekehrt bewirkten Bäder aus Fluorcalcium und Schwefelsäure anfangs eine schwach matte Aetzung und Verfestigung. Bei längerem Stehen des Bades ergab dasselbe eine blanke Aetzung, d. h. ohne Niederschlag von Krystallen wurde durch die im Bade vorhandene freie Flußsäure die obere Schicht der Stäbchen aufgelöst, wobei dieselben sich häufig mit einer leicht abzustreifenden gallertartigen Masse bedeckten und an Dicke merklich reducirt erschienen. Auch diese Stäbchen zeigten trotz des Fehlens einer Krystallbelegung, die Verfestigung deutlich.

Hiernach scheint die Ursache der Erscheinung nicht darin zu liegen, daß bei der Aetzung das Stäbchen einen Ueberzug von größerer Festigkeit erhält, sondern in dem Umstande, daß ein äußerer Ueberzug von geringerer Cohäsion durch das Aetzen zerstört wird.

Man müßte sich die Vorstellung bilden, daß der in dem Ueberzuge vorzeitig eintretende Bruch durch irgend welche dynamische oder statische Einwirkung den Kern, dessen Grenzspannung noch nicht erreicht war, ebenfalls zum Reißen bringt.

Eine gewisse Stütze empfängt diese Auffassung durch die Gestalt der Bruchflächen an den gedehnten Stäben. Waren diese ungeätzt, so zeigte der Bruch regelmäßig am Rande einen durch einen Kreisbogen nach Innen begrenzten „Spiegel“, eine anscheinend völlig ebene, spiegelnde Stelle, während der Rest des Querschnittes rauh und gefurcht erschien. Die radial gemessene Breite dieses Spiegels war im allgemeinen um so größer, je geringer die Festigkeit war. An den verfestigten Stäbchen zeigte sich dieser Spiegel

nicht. Man kann vielleicht annehmen, daß derselbe an der Stelle des weniger festen Mantels auftrat, in welcher der Bruch begann. Die Verfestigung erhöhte die Grenzspannung bei allen drei Zerreißmethoden, wenn auch nicht bei allen in demselben Maße.

In ihrem elastischen Verhalten erwiesen die Stäbchen sich durch die Aetzung nicht merklich verändert.

Die Tabellen IV, V, VI enthalten die gefundenen Resultate. Die Bezeichnung entspricht der in den ersten drei angewandten.

Tabelle IV.

Dehnungsfestigkeit geätzter Glasstäbe.

No.	a	b	q	p	P	$\overline{p}$
1.	0,832	0,794	2,08	4,925	33,86	16,32
2.	0,752	0,666	1,57	3,570	27,09	17,21
3.	0,903	0,866	2,72	8,345	50,56	18,71
4.	0,843	0,824	2,18	3,435	26,41	12,11
5.	0,860	0,814	2,20	8,835	53,41	24,26
6.	0,800	0,695	1,75	3,590	27,19	15,59
7.	0,732	0,777	1,79	5,170	35,09	18,21
8.	0,773	0,731	1,78	3,620	26,69	15,05
9.	0,781	0,755	1,86	8,160	50,04	26,95
10.	0,935	0,910	2,67	10,310	60,79	22,80
11.	0,906	0,869	2,47	6,460	41,54	16,81
12.	0,870	0,835	2,28	6,050	39,49	17,32
13.	0,880	0,841	2,32	7,980	49,14	21,2
14.	0,880	0,841	2,32	7,21	45,29	19,55
15.	0,916	0,878	2,53	7,60	47,22	18,69
16.	0,927	0,892	2,60	4,86	33,54	12,90
17.	0,874	0,855	2,35	5,10	34,72	14,78
18.	0,880	0,857	2,37	7,30	45,74	19,31
19.	0,820	0,789	2,03	5,11	34,77	17,12
20.	0,855	0,820	2,20	5,277	35,63	16,20
21.	0,889	0,854	2,38	6,020	39,34	16,50
22.	0,722	0,666	1,51	3,927	28,88	19,13
23.	0,945	0,915	2,64	6,070	39,59	15,00
24.	0,902	0,875	2,48	8,04	49,44	19,90

Im Mittel $\overline{p} = 17,97$.

Tabelle V.

Biegungsfestigkeit geätzter Glasstäbe.

No.	a	b	$a^2 b\pi$	l	p	μ	M	$M+\mu$	$\overline{p}$
1.	0,900	0,925	2,35	9,7	242,4	1,26	12,10	13,36	22,72
2.	0,862	0,904	2,11	10,4	246,6	1,28	12,39	13,67	25,92
3.	0,804	0,824	1,66	10,3	278,9	1,28	13,90	15,18	36,44
4.	0,865	0,865	1,90	11,1	244,8	1,30	12,39	13,69	28,80
5.	0,851	0,865	1,96	10,7	261,4	1,29	13,10	14,39	29,26
6.	0,860	0,870	2,02	10,5	160,5	1,28	8,29	9,57	18,93
7.	0,815	0,815	1,70	10,2	228,4	1,28	11,50	12,78	30,14
8.	0,845	0,881	1,97	10,0	258,0	1,27	12,85	14,12	28,74
10.	0,770	0,805	1,50	10,2	236,5	1,28	11,88	13,16	35,10
11.	0,816	0,855	1,79	10,2	219,8	1,28	11,08	12,36	27,68

No.	a	b	$a^2b\pi$	l	p	μ	M	$M+\mu$	$\bar{p}$
12.	0,825	0,830	1,77	10,5	320,5	1,28	15,90	17,18	38,80
13.	0,828	0,866	1,86	10,0	123,5	1,27	6,50	7,77	16,72
14.	0,810	0,830	1,70	10,4	109,8	1,28	5,86	7,14	16,74
15.	0,820	0,850	1,79	10,4	184,5	1,28	9,41	10,69	23,84
16.	0,860	0,885	2,06	10,7	151,8	1,29	7,89	9,18	17,83
17.	0,814	0,849	1,76	10,4	153,5	1,28	7,95	9,23	20,98
18.	0,835	0,865	1,89	9,9	240,7	1,27	12,01	13,28	28,04
19.	0,825	0,814	1,74	10,5	335,6	1,28	16,60	17,88	41,10
20.	0,810	0,849	1,74	10,5	187,1	1,28	9,55	10,83	24,94
21.	0,761	0,795	1,44	10,5	227,1	1,28	11,45	12,73	35,40

Im Mittel $\bar{p} = 27,46$.

Tabelle VI.

Torsionsfestigkeit geätzter Glasstäbe.

No.	a	b	$ab^2\pi$	p	$\bar{p}$
1.	0,820	0,778	1,55	386	20,4
2.	0,822	0,794	1,62	664	33,2
3.	0,835	0,796	1,66	475	23,3
4.	0,820	0,792	1,62	497	25,0
5.	0,895	0,870	2,12	513	19,8
6.	0,839	0,815	1,74	565	26,4
7.	0,916	0,879	2,22	673	24,6
8.	0,925	0,885	2,27	832	29,6
9.	0,926	0,891	2,30	815	28,4
10.	0,926	0,886	2,28	450	15,8
11.	0,900	0,847	2,03	330	13,0
12.	0,920	0,871	2,20	440	16,3
13.	0,925	0,888	2,29	362	13,0
14.	0,681	0,646	0,897	198,5	18,3
15.	0,956	0,946	2,69	396	12,0
16.	0,790	0,790	1,55	339	18,0
17.	0,775	0,730	1,30	241	15,5
18.	0,833	0,788	1,63	323	16,2
19.	0,864	0,813	1,80	355	16.2
20.	0,847	0,793	1,67	404	19,8
21.	0,910	0,881	2,22	602	22 0
22.	0,935	0,905	2.40	605	20,4
23.	0,926	0,905	2,38	698	23,7
24.	0,892	0,844	1,99	399	16,0
25.	0,878	0,835	1,92	336	14,0
26.	0,890	0,840	1,98	444	18,0
27.	0,950	0,933	2,60	965	29,6
28.	0,944	0,921	2,52	655	21,0
29.	0,930	0,920	2,46	500	16,6
30.	0,900	0,874	2,15	479	18,2
31.	0,881	0,858	2,09	362	14.2
32.	0,855	0,816	1.79	457	20,9
33.	0,879	0,856	2,02	565	22,7
34.	0,813	0,781	1,56	280	14,8
35.	0,908	0,876	2.18	535	20,0
36.	0,900	0,859	2,08	393	15,4
37.	0,860	0,821	1,82	585	26,1
38.	0,881	0,869	2,09	435	17,0
39.	0.694	0,650	0,925	387	34.1
40.	0,920	0·890	2,29	426	15,2
41.	0,925	0,895	2,32	698	24,4
42.	0,880	0,838	1,94	596	25,0

Im Mittel $\bar{p} = 20,34$.

Zur Uebersicht stelle ich wieder Grenzspannungen und Dilatationen hier zusammen, wobei letztere mit Hülfe der an den ungeätzten Stäben gefundenen Werthe für Δ und μ berechnet sind.

1. Bei einseitigem Zuge
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 26,95, $\bar{s}$ 0,00408.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 17,79, $\bar{s}$ 0,00272.
2. Bei Biegung durch Momente
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 41,1, $\bar{s}$ 0,00622.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 27,46, $\bar{s}$ 0,00416.
3. Bei Torsion
   a. Maximalwerthe
   $\bar{p}$ 34,1, $\bar{s}$ 0,00614.
   b. Mittelwerthe
   $\bar{p}$ 20,34, $\bar{s}$ 0,00366.

Hier zeigt die Biegung in der That beträchtlich höhere Werthe $\bar{p}$ und $\bar{s}$ als die Dehnung. Die Grenzdilatationen ergeben bei Torsion und Biegung nahezu gleiche Werthe. Doch sind die einzelnen Werthe so schwankend, daß sichere Schlüsse sich nicht ziehen lassen.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß alle diese Untersuchungen das betreffen, was St. Vénant rupture prochaine nennt. Die Frage, ob man die Deformationen und Spannungen bis zum Bruch linear mit einander verknüpft ansehen kann, ob vor dem Bruch bleibende Deformationen entstehen etc. ist noch offen.

Schon deswegen erscheinen Schlüsse, welche jene lineare Relationen benutzen, als unsicher.

Es dürfte, um eine einwandsfreie Definition der Begriffe Festigkeit und Festigkeitsgrenze geben zu können ein Einblick in dasjenige nothwendig sein, was die Engländer das „elastic life“ des Materiales genannt haben. Nach dieser Richtung denke ich die Versuche fortzusetzen.

Ueber das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone (II).

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1894.

Wie ich bereits früher kurz mitgetheilt habe, lassen sich cyclische Oxime unter Aufspaltung des Kohlenstoffringes in ungesättigte Nitrile mit kettenförmiger Anordnung der Kohlenstoffatome überführen. Zunächst ist nun das auf diesem Wege aus dem Menthonoxim gewonnene Nitril $C_{10}H_{17}N$ verschiedenen Umformungen unterworfen worden und es hat sich dabei herausgestellt, daß die Verbindung in allernächster Beziehung steht zu einigen in ätherischen Oelen vorkommenden Substanzen, welche durch ihren starken und angenehmen Geruch seit lange die Aufmerksamkeit erregt haben.

Ich will zunächst auf die aus dem Menthonitril erhaltenen Umwandlungsprodukte eingehen.

Wenn das Menthonitril in alkoholischer Lösung mit Natrium reducirt wird, so entstehen zwei durch die verschiedene Löslichkeit ihrer Oxalate leicht trennbare Basen. Die aus dem schwerer löslichen Salz abgeschiedene Base hat die Formel $C_9H_{17}CH_2NH_2$, siedet unzersetzt bei 207—208^0, d = 0.8075, n_D = 1.45 (M = 51.69, ber. 51.58). Die Verbindung ist isomer mit dem bekannten cyclischen Menthylamin. Das Chlorhydrat ist luftbeständig und unlöslich in Aether, das Chlorplatinat schwer löslich in Wasser, das Oxamid $(C_{10}H_{19}NH)_2(CO)_2$ schmilzt bei 82—83^0. Aus dem bei der Reduction des Nitrils entstehenden leicht löslichen Oxalat ließ sich eine bei 252—255^0 siedende Base isoliren, welcher die Formel $C_{10}H_{23}NO$ zukommt, die also offenbar ein Hydrat der vorigen ist.

Diese Erscheinung, daß ungesättigte Basen mit kettenförmiger Anordnung der Kohlenstoffatome durch Wasseraddition leicht in gesättigte hydroxylirte Basen übergehen, scheint eine sehr all-

gemeine zu sein. Ich bin ihr früher schon bei der Reduction des Fenchonitrils begegnet und neuerdings bei einer ganzen Reihe von Fällen. Wenn man z. B. das Oxim des Methylhexylenketon, $C_8H_{14}NOH$ reducirt, erhält man gleichzeitig die beiden Basen $C_8H_{17}N$ und $C_8H_{19}NO$.

Wird das Oxalat der Base $C_9H_{17}CH_2NH_2$ mit Natriumnitrit umgesetzt, so entsteht eine Flüssigkeit, welche namentlich bei der Destillation mit Wasserdampf einen angenehmen und durchdringenden Rosengeruch verbreitet. Das Rohproduct ist ein Gemenge von einem Kohlenwasserstoff, einem Alkohol und dessen Nitrit. Letzteres kann durch Erwärmen mit Natriumalkoholat leicht zerstört werden. Kohlenwasserstoff und Alkohol trennt man durch Destillation im Vacuum.

Der Kohlenwasserstoff hat die Formel $C_{10}H_{18}$, er ist ein isomeres acyclisches Menthen. Er siedet bei gewöhnlichem Druck bei 153—156°, d = 0.7545, n_D = 1.4345.

Der Alkohol hat die Formel $C_{10}H_{19}OH$, ist also isomer mit Menthol, dem riechenden Princip des Pfefferminzöls. Der Geruch des neuen Alkohols ist nicht zu unterscheiden vom Linalool, also dem Alkohol, der u. a. einen Hauptbestandtheil des Lavendelöls ausmacht. Der Siedepunkt liegt bei 10 mm bei 95—100°, d = 0.8513, n_D = 1.44809.

Das Acetat des Alkohols hat den ausgeprägten Geruch des Bergamottöls, das diese Eigenschaft bekanntlich der Anwesenheit von Linaloolacetat verdankt, so daß auch nach dieser Richtung die Eigenschaften des neuen Alkohols mit dem des Linalools zusammenfallen.

Bei der Oxydation des Alkohols $C_{10}H_{19}OH$ entsteht ein Aldehyd, der mit Natriumbisulfit eine krystallisirte Verbindung eingeht und auf diese Weise isolirt werden kann. Der aus der Doppelverbindung durch ätzende oder kohlensaure Alkalien freigemachte Aldehyd besitzt einen ganz intensiven Apfelsinengeruch.

Die zu dem Aldehyd zugehörige Säure erhält man am bequemsten aus dem Menthonitril direct. Kocht man dieses kurze Zeit mit alkoholischem Kali, so entsteht ein bei 108—112° schmelzendes Säureamid, $C_9H_{17}CONH_2$. Bei längerer Einwirkung entsteht das Kaliumsalz der Säure $C_9H_{17}COOH$.

Diese Säure siedet bei gewöhnlichem Druck bei 257—261°, und besitzt einen schwachen Fettsäuregeruch. Für die Säure wurde gefunden d = 0.918 n_D = 1.45109 [M = 49.87 berechnet für $C_{10}H_{18}O_2F$ = 49.44].

Bei weiterer Oxydation läßt sich die flüssige Säure $C_9H_{17}CO_2H$ in eine krystallisirte gegen 80° schmelzende Säure überführen.

Bei der Aehnlichkeit, welche die Umformungsproducte des Menthonitrils mit gewissen natürlich vorkommenden Substanzen zeigen, war nun zu versuchen, die chemischen Beziehungen der synthetisch gewonnenen Verbindungen zu einigen in ätherischen Oelen enthaltenen klar zu stellen.

Mit einem im Apfelsinenöl enthaltenen Aldehyd zeigt der erst beschriebene die größte Aehnlichkeit. Die Schwierigkeit das nöthige Material in größerer Menge zu beschaffen, hat es bisher nicht erlaubt zu entscheiden, ob beide Körper identisch sind. Leichter war der Vergleich mit dem Aldehyd des Citronellaöls und dessen Derivaten.

Den Hauptbestandtheil des Citronellaöl bildet das Citronellal, $C_{10}H_{18}O$, das bereits von Semmler in ein Oxim $C_{10}H_{18}NOH$ und ein Nitril $C_{10}H_{17}N$ verwandelt worden ist.

Dies Nitril hat also dieselbe Zusammensetzung, wie das Menthonitril und theilt mit diesem fast alle physicalischen Eigenschaften, namentlich besitzt es in reinem Zustand auch den angenehm citronenartigen Geruch. Der Siedepunkt weicht aber ein wenig ab. Menthonitril siedet bei 225—226°, Citronellanitril bei 231—232°. Die Aehnlichkeit der Derivate beider Nitrile ist eine außerordentlich große, doch liegt keine vollkommene Identität, sondern augenscheinlich nur eine sehr nahe chemische Verwandtschaft zwischen beiden Verbindungsreihen vor.

Die beiden Basen, welche bei der Reduction des Nitrils entstehen, sind in diesem Fall etwas weniger leicht zu trennen, da die Löslichkeit der Oxalate keine so großen Unterschiede zeigt. Die Säure $C_{10}H_{18}O_2$ aus dem Citronellanitril kann mit der erst beschriebenen leicht verwechselt werden. Die durch Oxydation aus ihnen entstehenden krystallisirten Säuren scheinen identisch zu sein.

Um den Mechanismus näher zu erforschen, nach welchem sich die Aufspaltung des Menthon-Moleküls vollzieht, sind verschiedene Wege eingeschlagen worden.

Bei der Behandlung mit Wasser entziehenden Agentien geht das Menthonoxim immer zunächst in Isomenthonoxim über. Wenn man letzteres mit Phosphorpentachlorid behandelt und nach Entfernung der flüchtigen unorganischen Reactionsproducte den Rückstand einige Zeit auf 100° erwärmt, so entsteht, wie ich neulich schon mitgetheilt habe, eine schön krystallisirende, bei 60° schmelzende Verbindung. Diese wurde anfangs als ein neues Isomeres des Menthonoxim angesprochen, zumal die Resultate der Kohlen-

stoff- und Stickstoffbestimmungen diese Auffassung unterstützten. Die weitere Untersuchung lehrte aber, daß das Zusammenfallen dieser analytischen Werthe nur auf einen Zufall beruht und daß man es mit einer chlorhaltigen Base der Formel $C_{20}H_{35}ClN_2$ zu thun hat, welche ganz unerwarteter Weise sich aus zwei Molekülen Isomenthonoxim nach der Gleichung bildet:

$$2\,C_{10}H_{19}NO + 2\,PCl_5 = 2\,POCl_3 + 3\,HCl + C_{20}H_{35}ClN_2.$$

Die Base besitzt ein sehr starkes Drehungsvermögen. In verdünnter alkoholischer Lösung wurde gefunden:

$$[\alpha]_D = -186.35^0.$$

Die Salze krystallisiren theilweis sehr gut.

Das Chlorhydrat $C_{20}H_{35}ClN_2 . 2\,HCl$ ist sehr löslich in Wasser und unlöslich in Aether. Das entsprechende Jodhydrat ist aber so schwer löslich in Wasser, daß es aus einer wäßrigen Lösung des Chlorhydrats durch Kaliumjodidlösungen ausgefällt werden kann. Aehnlich schwerlöslich ist das Nitrat und das Nitrit. Durch Unlöslichkeit und Beständigkeit zeichnet sich ferner das Permanganat aus.

Bei der Destillation zerfällt die chlorhaltige Base nach der Gleichung

$$C_{20}H_{35}ClN_2 = HCl + 2\,C_{10}H_{17}N$$

d. h. sie spaltet sich in Salzsäure und Menthonitril. Der Vorgang verläuft zwar nicht glatt, man erkennt aber, daß bei der Aufspaltung des Menthonoxims durch Chlorphosphor die eben beschriebene complicirte Verbindung als Zwischenproduct entsteht.

Man kann nun annehmen, daß das Isomenthonoxim ein hydroxylirtes Imid ist, welches durch Atomumlagerung aus dem Menthonoxim ähnlich sich bildet, wie Amidothymol aus Carvoxim. In Berührung mit PCl_5 würde dann OH gegen Cl ausgetauscht werden müssen und 2 Moleküle des gechlorten Produkts könnten unter Salzsäureaustritt übergehen in eine Verbindung:

```
         C3H7                   CH3
          |                      |
          CH                     CH
        /    \                 /    \
    H2C        C = N — HC            CH2
     |         |        |            |
   ClHC        CH2     H2C           C = NH
        \    /             \      /
          CH                  CH
          |                   |
          CH3                 C3H7
```

Möglicherweise hat man aber das Chlor und die (NH)-Gruppe in Ortho-Stellung zu dem tertiär gebundenen Stickstoffatom anzunehmen.

Keinenfalls vollzieht sich unter dem Einfluß des Chlorphosphors der Uebergang der cyclischen Verbindung in die acyclische in einfacher Weise.

Weniger verwickelt gestaltet sich der Vorgang, wenn man die Wasserabspaltung aus Menthonoxim in anderer Weise einleitet, z. B. unter Anwendung von Phosphorsäureanhydrid, oder durch bloßes Erhitzen von Menthonoxim. Auch dabei bildet sich, wie nachgewiesen werden konnte, schon Menthonitril.

Ich nehme an, daß als Ursache für die Leichtigkeit der Ringspaltung in diesem Fall die Gegenwart des polyvalenten Stickstoffatoms angesehen werden darf. Wenn das Oxim 1 Molekül Wasser verliert, entsteht am Stickstoff eine freie Valenz. Indem diese durch Kohlenstoffbindung ausgeglichen wird, tritt eine Störung der Bindungsverhältnisse im Kohlenstoffring ein, welche zu einer Aufspaltung führen muß. Ein Blick auf die folgenden Formelsymbole macht den Vorgang ohne weiteres verständlich.

```
  CH3     CH3                          CH3    CH3
     \   /                                \  /
      CH                                   CH
      |                                    |
      CH                                   CH
     /  \                                 //
 HCH      C = N — OH  =  H2O  +  CH          C ≡ N
  |       |                      |           |
 H2C      CH2                    CH2         CH2
    \    /                          \       /
     CH                               CH
     |                                |
     CH3                              CH3
```

Menthonoxim $C_{10}H_{18}NOH$. Menthonitril $C_{10}H_{17}N$.

Schreibt man nun, gewohnheitsgemäß, die acyclische Verbindung mit gradliniger Anordnung der Kohlenstoffatome, [womit selbstverständlich nicht die Vorstellung von einer entsprechenden räumlichen Ausdehnung verbunden werden darf,] und leitet man vom Nitril die erst beschriebenen Verbindungen $C_{10}H_{21}N$, $C_{10}H_{20}O$ und $C_{10}H_{18}O$ ab, so kommt man zu folgenden Formeln:

$(CH_3)_2CH—CH = CH—CH_2—CH(CH_3)—CH_2CN$ Nitril

$(CH_3)_2CH—CH = CH—CH_2—CH(CH_3)—CH_2CH_2NH_2$ Base

$(CH_3)_2CH-CH = CH-CH_2-CH(CH_3)-CH_2CH_2OH$ Alkohol
$(CH_3)_2CH-CH = CH-CH_2-CH(CH_3)-CH_2COH$ Aldehyd.

Die Stelle, an der die Aethylenbindung steht, kann sich in derartigen Verbindungen erfahrungsgemäß leicht verschieben. Ein Vergleich dieser Formeln mit denjenigen, welche auf Grund der entsprechenden Experimentaluntersuchungen neuerdings z. B. für Rhodinol, Geraniol, Linalool, Citral, Citronellal, also für die theils rosenähnlich, theils citronenähnlich riechenden Alkohole und Aldehyde, die in ätherischen Oelen vorkommen, angenommen sind, läßt sofort die große Uebereinstimmung der chemischen Structur erkennen. Damit erklärt sich dann auch von selbst die Aehnlichkeit, welche im physicalischen Verhalten jener natürlichen und der künstlich gewonnenen Körper hervortritt.

Zur Erledigung der theoretisch belangreichen Frage, unter welchen Bedingungen eine Sprengung cyclischer Kohlenstoffsysteme eintritt, sind nun noch verschiedene andere Versuche ausgeführt worden, die ich nur flüchtig berühren will.

Menthonoxim spaltet sich auch leicht beim Erhitzen mit Kali auf etwa 220—230° auf. Dabei entsteht in reichlicher Menge eine Säure, welche mit der erst beschriebenen aus Menthonitril identisch ist. Das Product ist aber nicht einheitlich und bedarf noch einer eingehenden Untersuchung.

Dem Menthonoxim ganz analog verhält sich das isomere Oxim, welches sich vom Tetrahydrocarvon ableitet. Unter dem Einfluß von concentrirter Schwefelsäure oder Chlorphosphor und darauf folgender Behandlung mit Wasser wird es zunächst isomerisirt. Der Schmelzpunkt des neu entstehenden Oxims weicht kaum vor dem des Ausgangsmaterials ab, dagegen ist das Verhalten beider gegen verdünnte Säuren ganz verschieden. Wasser entziehende Mittel verwandeln die Oxime in ein Nitril, das denselben Umformungen unterworfen worden ist, wie das Menthonitril. Die durch Reduction gewonnene Base $C_9H_{17}CH_2NH_2$ bildet auch ein schwerlösliches Oxalat und läßt sich in einen Alkohol $C_9H_{17}CH_2OH$ überführen. Dieser ist von dem entsprechenden der Methonreihe ganz verschieden und namentlich keineswegs durch angenehmen Geruch ausgezeichnet.

Die Untersuchungen über das weitere Verhalten dieser Verbindungen sind noch nicht abgeschlossen.

Ueber das Alter der Erzgänge des Harzes.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1894.

Die Erzgänge des Oberharzes setzen, entgegen den bisherigen Angaben, im Zechstein und Buntsandstein des westlichen Harzrandes mindestens theilweise als Verwerfungen fort, und in ihrem Fortstreichen treten im mittleren Buntsandstein, Muschelkalk etc. Verwerfungen auf, welche zum Theil schon auf größere Entfernungen hin verfolgt werden konnten und an einzelnen Stellen auch Tertiärschichten miocänen Alters abgeschnitten haben.

Aus verschiedenen Gründen habe ich schon vor Jahren gefolgert, daß der Harz im Wesentlichen erst in jung-miocäner Zeit emporgehoben worden ist, also gleichzeitig mit so vielen anderen Gebirgen der Erde. Zu derselben Zeit und in Folge der Aufbauchung durch tangentialen Druck nach Nordnordosten dürften dann auch im Wesentlichen die Gangspalten des Harzes entstanden sein, wenn auch anzunehmen ist, daß sie sich später und vielleicht auch schon früher wiederholt geöffnet haben. Die Aufbauchung durch tangentialen Druck von Osten nach Westen dürfte Veranlassung zur Entstehung der Süd-Nord-Thäler des Harzes und seines nördlichen und westlichen Vorlandes gegeben haben.

Ausführlicher werden diese Resultate zusammen mit einer Uebersicht über den geologischen Bau des nunmehr fertig aufgenommenen Gebietes westlich und südwestlich vom Harz im Jahrbuch der Kgl. Preußischen Geologischen Landesanstalt pro 1893 S. 68 ff. veröffentlicht werden.

Ueber Epithelknospen in der Regio olfactoria der Säuger.

Von

J. Disse, ao. Professor und Prosector in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Februar 1894 von Fr. Merkel.

Seit den Untersuchungen von Max Schultze, die die Riechzellen als einen wesentlichen Bestandteil der Nasenschleimhaut bei sämmtlichen Wirbeltierklassen nachgewiesen hatten, richtete sich die Aufmerksamkeit der Untersucher des Geruchsorgans vornehmlich darauf, ob die Riechzellen mit den Fasern des n. olfactorius zusammenhängen, oder nicht. Diese Frage ist erst in neuester Zeit endgültig dahin entschieden worden, daß die Fasern des n. olfactorius mit den Riechzellen zusammenhängen, weil sie aus ihnen hervorwachsen. Die Riechzellen sind periphere Ganglienzellen. Ferner hat der Bau der Stützzellen, die zwischen den Riechzellen liegen, und besonders die Frage, ob sie einen Flimmersaum tragen oder nicht, die Forscher beschäftigt; und weil das Riechepithel sehr unregelmäßig begränzt ist, und vielfach Streifen flimmernden Epithels in Buchten des Riechepithels hinein sich erstrecken, ist jene Frage verschieden beantwortet worden; die einen fanden Flimmerepithel in der regio olfactoria, die andern vermißten dasselbe. Die erwähnten streitigen Punkte haben, wie mir scheint, das Interesse der Untersucher völlig in Anspruch genommen; darüber ist ihnen eine Eigenthümlichkeit der Schleimhaut der regio olfactoria, d. h. des bräunlich pigmentirten Bezirks der Nasenschleimhaut am Dach, Septum und lateraler Wand der Nasenhöhle, entgangen, die an dünnen Durchschnitten gut fixirter Schleimhaut zu constatiren ist, nämlich das Vorkommen von Knospen (becherförmigen Organen) im Epithel. Diese Epithelknospen gleichen denen, die aus dem Integument der Fische und Amphibien, der Mund- und Rachenhöhle, sowie aus dem Kehlkopf der Säuger seit längerer Zeit bekannt sind, und die wegen ihrer Beziehungen zu sensiblen Nerven in der neuesten Zeit auf Nervenendigungen vielfach untersucht worden sind.

Ich habe diese Epithelknospen in der Schleimhaut der regio olfactoria des Kalbes aufgefunden, und an gleicher Stelle bei der Katze und beim Kaninchen nachweisen können; die menschliche Nasenhöhle ist catarrhalischen Entzündungen so oft ausgesetzt, daß es mir bis jetzt nicht gelungen ist, eine normale Nasenschleimhaut zu erhalten, die zur Untersuchung sich geeignet hätte. Die Schilderung meiner Befunde stützt sich wesentlich auf Untersuchungen an der regio olfactoria des Kalbes; hier sind die Epithelknospen reichlich vorhanden und gut ausgebildet.

Am besten fixirt man die regio olfactoria in Flemming'scher oder Hermann'scher Lösung.

Es liegen beim Kalb in der Schleimhaut der regio olfactoria größere und kleinere, knospenförmige Gebilde im Epithel; sie entstehen dadurch, daß besonders geformte Epithelzellen sich in concentrischen Lagen um einen Mittelpunkt anordnen, und so größere, rundliche, und kleinere, elliptische Organe aufbauen, die sich durch ihre Schichtung vom übrigen Epithel abheben. Die Hauptmasse der Zellen in den Knospen bleibt bei der Einwirkung des Osmiumgemisches heller, als das umgebende Epithel, und man wird auf die hellen Knospen in dunkler Umgebung leicht aufmerksam. Die Knospen ziehen sich von der Oberfläche des Epithels etwas zurück und liegen im Grunde kurzer, grubenförmiger Einziehungen des Epithels, die auf die Spitze der Knospe hinführen; gegen die Unterlage des Epithels dagegen springt jede Knospe mit leichter Wölbung vor.

Der Form und Größe nach kann man zwei Arten von Epithelknospen unterscheiden; größere, kuglige, die innerhalb des Riechepithels selbst liegen, und kleinere, von elliptischem Durchschnitt, die in dem flimmernden Cylinderepithel gelegen sind, das das Riechepithel umgiebt und in Buchten desselben hineinzieht.

I. Die großen, kugligen Knospen sind im Riechepithel unregelmäßig verteilt. Sie stehen hauptsächlich an der lateralen Nasenwand, auf den Siebbeinmuscheln, und sind zu Gruppen vereinigt. In jedem Schnitt aber trifft man größere Bezirke des Riechepithels an, die keine Knospen besitzen. Die Knospe liegt im Grunde einer engen Spalte, die senkrecht zur Oberfläche des Epithels gestellt ist und in die Knospe eindringt; sie wird nämlich seitlich von den freien Enden derjenigen Zellen begränzt, die die peripheren Schichten der Knospe aufbauen. Der größte Durchmesser einer derartigen Knospe betrug 0,135 mm; die zuführende Spalte war, bei einer Breite von 0,0045 mm, 0,040 mm tief.

Der Mantel der Knospe besteht aus vielen Lagen hoher Zellen,

die von der Propria bis zur freien Fläche des Epithels reichen, und der Fläche nach gebogen sind, wie Fassdauben. Sie haben ein helles Protoplasma, runde helle Kerne und einen langen centralen Fortsatz, an dem eine oder zwei plattenartige Verbreiterungen vorkommen. Der Kern bleibt vom freien Zellende immer ziemlich weit ab, und am peripheren Abschnitt der Knospe sieht man die hellen, homogenen Zellenleiber nebeneinander liegen, so daß die Knospe bei Ansicht von oben regelmäßig gestreift erscheint. Von den Stützzellen des Riechepithels unterscheiden sich diese Zellen in den peripheren Schichten der Knospe durch ihr helleres Protoplasma.

Das Centrum der Knospe wird von dicht gehäuften Kernen eingenommen, um welche herum man meistens die Zellgrenzen wahrnehmen kann. Die Zellen selbst sind an Schnittpräparaten selten in ihrer ganzen Länge zu übersehen, und man muß die Isolirung zu Hilfe nehmen um über die Zellenform ins Klare zu kommen. Der Zellleib ist birnförmig, das schmalere Ende geht in einen langen, zuweilen varicösen Fortsatz über und dieser reicht in die zur Knospe führende Spalte hinein; ihm gegenüber geht ein feiner kurzer Fortsatz ab, zur Propria hin gerichtet. Der Kern liegt der Abgangsstelle des centralen Fortsatzes zunächst, und das Protoplasma der Zelle geht allmählich in den peripheren Fortsatz über.

Osmium färbt die Zelle und den peripheren Fortsatz bräunlich, und deshalb gelingt es an Schnitten zuweilen, den peripheren Fortsatz bis in die Spalte hinein zu verfolgen. Er endigt mit einem kurzen Stift, der sich in Hämatoxylin färbt.

Diese Zellen müssen wir als die „Sinneszellen“ der Knospe bezeichnen; sie gleichen den Sinneszellen der Knospen der Mundhöhle durch ihre Form, wie durch ihr Verhalten gegen Osmium und durch die Beziehung ihres peripheren Fortsatzes zur erwähnten Spalte. Wenn man die Knospen nicht kennt, wird man derartige Sinneszellen wohl für isolirte, etwas abweichend geformte Riechzellen halten. Bei der Isolirung bricht der periphere Fortsatz leicht nahe der Zelle ab. (Zur Isolirung benutzte ich Maceration in Müller'scher und in Pacini'scher Flüssigkeit, 24—48 Stunden.)

Die den Mantel der Knospe ausschließlich bildenden Zellen sind die Stützzellen; sie liegen auch im Innern der Knospe zwischen den Sinneszellen.

Sehr oft tritt der Ausführungsgang einer Bowmann'schen Drüse unmittelbar neben einer großen Knospe in das Riechepithel hinein, und liegt der Knospe dicht auf. Er mündet dann in den Anfang der zuführenden Spalte ein.

Wenn beim Schneiden das Riechepithel sich von der Propria abhebt, so bleiben die Knospen auf der Propria sitzen; ihr Zusammenhang mit dem umgebenden Epithel ist also lockerer, als der mit der Unterlage.

Größere, zur Knospe ziehende Nervenzweige habe ich an Durchschnitten niemals wahrgenommen. Auch ist es mir bis jetzt nicht gelungen, die Zellen der großen Knospen nach der Methode von Golgi durch chromsaures Silber zu färben. An Präparaten, die die Riechzellen und Stützzellen in der Umgebung der Knospe gut gefärbt zeigten, blieben die Knospen selbst ungefärbt und waren gut zu erkennen.

An Flächenschnitten des Epithels treten die Knospen nur hervor, wenn die obere Hälfte in den Schnitt fällt.

II. Die kleinen, elliptischen Knospen im flimmernden Cylinderepithel finden sich sowohl an der Seitenwand der Nasenhöhle, als auch am Septum; sie stehen auf der freien Fläche der Siebbeinmuscheln und in den Furchen, die zwischen die Muscheln hineingehen. Ihre Form ist die eines Rotations-Ellipsoides, die große Axe steht senkrecht zur Oberfläche der Schleimhaut. Den längsten Durchmesser einer Knospe auf der freien Fläche einer Siebbeinmuschel fand ich zu 0,0675 mm, den größten Querdurchmesser 0,036 mm; die in den Furchen liegenden Knospen sind größer. Sie haben aber mit den frei stehenden eine Eigentümlichkeit gemeinsam; ihre Spitze (der periphere Pol) liegt im Grunde einer grubenförmigen Einsenkung, die viel seichter ist, als die Spalte, die zu den großen Knospen hinführt. Ich fand diese Grube 0,016 mm tief, und 0,008 mm breit.

Der Querschnitt dieser kleinen Knospen ist kein Kreis, sondern ein Oval; auf Schnittreihen von 0,01 mm Schnittdicke konnte ich solche Knospen mehrfach durch fünf aufeinanderfolgende Schnitte hindurch verfolgen.

Auch die kleineren Knospen sehen heller aus, als das umgebende Epithel, und heben sich wegen ihres geschichteten Baus, und wegen des Grübchens an ihrer Spitze, genügend hervor. Am Rande des Grübchens hört der Flimmerbesatz auf; in das Grübchen hinein ragen kurze, dicke und starre Häärchen, die aus der Knospe herauskommen, und zwischen deren Zellen als dunkle Streifen zu verfolgen sind. Einigemale erlaubte der Schnitt, diese Haare bis zu einer einen Kern umschließenden Anhäufung von Protoplasma zn verfolgen; sie erwiesen sich als periphere Ausläufer birnförmiger Zellen, und waren, wie der Zellenleib selbst, bräunlich gefärbt. Die Häärchen auf den Knospen, die in den

Furchen zwischen den Muscheln stehen, wurden länger gefunden als die auf frei stehenden Knospen; möglicherweise werden bei den frei stehenden Knospen die Häärchen durch das erhärtende Gemisch stärker verändert, als bei den geschützter stehenden Knospen. Die Basis des Häärchens ist in Hämatoxylin färbbar.

Wir haben also von Stützzellen umgeben, auch bei den kleineren Knospen Sinneszellen vor uns, die mit ihren Haaren in das zuführende Grübchen hineinreichen.

In der Umgebung dieser Knospen sind die Drüsen spärlich; zutretende Nervenbündel wurden nicht beobachtet.

Es ist mir einmal gelungen, durch die Golgi'sche Färbung innerhalb einer kleinen Knospe eine freie Nervenendigung in Form eines „Endbäumchens“ nachzuweisen; aber niemals habe ich die Stützzellen oder die Sinneszellen gefärbt erhalten.

Flächenschnitte des Epithels zeigen die kleinen Knospen, wenn das Grübchen mit im Schnitt enthalten ist; der Durchschnitt derselben erscheint wie eine ovale Oeffnung, in der man die starren Häärchen der Sinneszellen wahrnimmt. Man kann dieselben nicht mit Flimmerhaaren verwechseln, da sie viel dicker sind und in Osmium sich dunkel färben.

Man darf nicht erwarten, daß im cylindrischen Epithel eine Knospe sich so deutlich abgrenzt, wie sie es im geschichteten Plattenepithel thut; und man kann die Knospen der regio olfactoria bei oberflächlicher Betrachtung übersehen. Ist man aber erst auf ihr Vorkommen aufmerksam geworden, so macht es keine Schwierigkeit, die Knospen aufzufinden, wenn man an Durchschnitten untersucht. Schwieriger ist es schon, an Flächenschnitten die Knospen zu erkennen.

Die beschriebenen Organe entsprechen nun in den Einzelheiten ihres Baues denjenigen Knospen, die im Integument der Fische und Amphibien, und in der Mund- und Rachenhöhle der Säuger liegen.

1) Sie bestehen aus hohen Zellen, die von der Membrana propria bis zur freien Fläche des Epithels reichen;
2) Sie lassen Stützzellen und haartragende Sinneszellen unterscheiden;
3) Sie ziehen sich von der Oberfläche des Epithels zurück und liegen im Grunde von grubigen Vertiefungen;
4) Es endigen die Nerven in ihnen frei.

Es bedarf indessen dieser letzte Punkt noch einer genaueren Untersuchung.

Es bleibt noch zu erörtern, in welcher Beziehung die beschrie-

benen Knospen der regio olfactoria der Säuger zu denjenigen Gebilden stehen, die J. Blaue (Archiv für Anatomie 1884, S. 231—310) aus der Nasenhöhle der Fische und Amphibien beschrieben hat. Bei vielen Fischen nämlich tritt das Riechepithel selbst in Form von Knospen auf, die im indifferenten Epithel der Nasengrube verteilt sind, und einen zutretenden Ast des Riechnerven besitzen. Bei Amphibien findet sich ebenfalls das Riechepithel durch derartige Knospen vertreten. Wenn nun bei andern Fischen und manchen Amphibien ein continuirliches Riechepithel sich vorfindet, so ist dies, nach Blaue, aus confluirten Knospen entstanden zu denken; die ursprünglichen Knospen aber, in die der Riechnerv hinein tritt, sind homolog den Knospen im Integument, und aus ihnen durch Differenzirung hervorgegangen.

Seitdem erkannt ist, daß die Riechzellen periphere Ganglienzellen sind, und daß sich der Riechnerv aus ihren Axencylinderfortsätzen zusammensetzt, kann man nicht daran denken, die Riechzellen den Sinneszellen der Knospen des Integuments gleich zu stellen. Die Riechknospen können nicht aus den Knospen des Integuments hervorgegangen sein; das Riechepithel hat mit den Knospen des Integuments nichts zu thun. Den Knospen, die Blaue bei Fischen und Amphibien beschrieben hat, entspricht das gesammte Riechepithel der Säuger. Dagegen haben die von mir beschriebenen Knospen in der regio olfactoria einen Bau, der mit dem der Knospen im Integument, und in der Mundhöhle übereinstimmt; sie sind denselben gleichzustellen. Da die Riechgrube aus dem Integument hervorgeht, so ist das Vorkommen von Epithelknospen in ihr zu begreifen; wie in der Mundhöhle, erhalten sich in der Nasenhöhle die Knospen bei den Säugern. Für die Function dieser Organe dagegen folgt aus der morphologischen Betrachtung noch nichts; sie bedarf einer genaueren Untersuchung.

In der Litteratur habe ich nur einen kurzen Hinweis auf die Knospen in der regio olfactoria gefunden, den ich wörtlich anführen will. Paulsen bemerkt in einer Untersuchung über die Drüsen der Nasenschleimhaut (Archiv f. mikr. Anatomie Bd. 26, 1886): „Ferner fiel mir im Riechepithel an Osmiumpräparaten des Pferdes, „Schweines und Meerschweines auf, daß an einzelnen Stellen die „Elemente desselben derartig angeordnet sind, daß knospenförmige „Gebilde entstehen. Ob diese Knospen zu den Geruchsknospen, „die Blaue als Endapparate des Geruchsnerven bei einer Anzahl „von Fischen und Amphibien auffand, in irgend welcher Beziehung „stehen, kann ich nicht entscheiden, und will nur auf derartige, „in die Augen fallende Anordnung des Riechepithels hingewiesen „haben“ (S. 318).

Es ist diese Notiz unbemerkt vorübergegangen, und ich habe sie erst kennen gelernt, als die Untersuchung einen gewissen Abschluß erhalten hatte. Sie constatirt das Vorkommen der Epithelknospen bei drei weiteren Species.

Ueber Medien ohne innere Kräfte und eine durch sie gelieferte mechanische Deutung der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1894.

In dem 34. Bande der Abh. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vom Jahre 1887 habe ich die Gleichgewichtsgleichungen für einen nicht-starren Körper unter der allgemeinsten Voraussetzung entwickelt, daß seine Theile nicht nur Kräfte, sondern auch Drehungsmomente in Folge von äußeren Ursachen und von zwischen ihnen bestehenden Wechselwirkungen erfahren. Diese Formeln lassen sich ohne Weiteres für den Bewegungszustand verallgemeinern.

Bezeichnet man mit X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z, X_n, Y_n, Z_n die Componentensummen der innern Kräfte über die Flächeneinheiten normal zu den Coordinatenaxen und zu einer willkürlich gelegenen Richtung n, mit L_x, M_x, N_x, L_y, M_y, N_y, L_z, M_z, N_z, L_n, M_n, N_n die analog gebildeten Summen über die Drehungsmomente der Wechselwirkungen, so gelten für diese die Beziehungen

$$1)\quad \begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_n &= L_x \cos(n,x) + L_y \cos(n,y) + L_z \cos(n,z), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Bedeuten noch u, v, w die Verrückungscomponenten, ε die Dichte, X, Y, Z die auf die Masseneinheit bezogenen äußern Componenten, L, M, N die ebenso definirten Momente an der Stelle x, y, z, so lauten die Hauptgleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung

2) $$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z},$$

. . . .

3) $$0 = \varepsilon L - \frac{\partial L_x}{\partial x} - \frac{\partial L_y}{\partial y} - \frac{\partial L_z}{\partial z} + Y_z - Z_x.$$

. . . .

An der Grenze zweier Körper h und k gilt bezüglich der Verrückungen

4) $$\bar{u}_h = \bar{u}_k, \quad \bar{v}_h = \bar{v}_k, \quad \bar{w}_h = \bar{w}_k,$$

bezüglich der Kräfte, falls n die innere Normale auf dem Oberflächenelement bezeichnet,

5) $$\begin{aligned} (\bar{X}_n)_h + (\bar{X}_n)_k &= (\bar{Y}_n)_h + (\bar{Y}_n)_k = (\bar{Z}_n)_h + (\bar{Z}_n)_k = 0, \\ (\bar{L}_n)_h + (\bar{L}_n)_k &= (\bar{M}_n)_h + (\bar{M}_n)_k = (\bar{N}_n)_h + (\bar{N}_n)_k = 0. \end{aligned}$$

An der freien Oberfläche pflegen die Verrückungen oder die wirksamen Drucke vorgeschrieben zu sein.

Daß die Gleichungen (3) die Rotationsbeschleunigungen der kleinsten Theilchen nicht enthalten, liegt daran, daß dieselben in die Trägheitsmomente multiplicirt auftreten, welche von einer höheren Ordnung unendlich klein werden, als die Volumenelemente.

Um nun den in der Ueberschrift bezeichneten speciellen Fall zu erhalten, daß das nicht-starre Medium keine inneren Kräfte besitzt, wollen wir, was sich durch gewisse Ueberlegungen auch besonders begründen läßt, zunächst die Momentendrucke L_x ... gegen Null convergiren lassen. Dann zeigt sich, daß die Druckcomponenten X_x ... Antheile erhalten, welche nicht allgemein verschwinden können, da sonst die kleinsten Theile durch äußere Momente L, M, N eine unendliche Rotationsbeschleuniguug erhalten würden. Es müssen vielmehr stets die tangentialen Componenten Y_y, Z_y ... den Bedingungen genügen

6) $$\varepsilon L = Z_y - Y_z, \quad \varepsilon M = X_z - Z_x, \quad \varepsilon N = Y - X_y;$$

dagegen bleibt zulässig,

6') $$X_x = Y_y = Z_z = (Y_z + Z_y) = (Z_x + X_z) = (X_y + Y_x) = 0$$

zu setzen. Die Gleichungen (2) nehmen hierdurch die Form an

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon X + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon N}{dy} - \frac{\partial \varepsilon M}{\partial z}\right),$$

7)
$$\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon Y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon L}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon N}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon Z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon M}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon L}{\partial y}\right),$$

die man als für ein Medium ohne innere Kräfte characteristisch betrachten darf, da die Differenzen $(Z_y - Y_z)$ ... nach (6) den Character äußerer Kräfte besitzen und

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y),\ \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z),\ \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)$$

gerade die sonst bei nicht-starren Körpern maßgebenden Druckcomponenten sind.

Führt man zur Abkürzung die auf die Volumeneinheit bezogenen Componenten und Momente ein, d. h. setzt

8)
$$\varepsilon X = \Xi,\quad \varepsilon Y = H,\quad \varepsilon Z = Z,$$
$$\varepsilon L = \Lambda,\ \varepsilon M = M,\ \varepsilon N = N,$$

so gilt

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

9)
$$\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right).$$

Hieraus folgt die Gleichung der lebendigen Kraft Ψ in der Form

10)
$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int(\Xi u' + Hv' + Zw' + \Lambda l' + Mm' + Nn')\,dk$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int\Big((N\cos(\nu, y) - M\cos(\nu, z))u' + (\Lambda\cos(\nu, z) - N\cos(\nu, x))v'$$
$$+ (M\cos(\nu, x) - \Lambda\cos(\nu, y))w'\Big)\,do,$$

wobei l, m, n, die Rotationscomponenten, durch

11) $$l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad n = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

gegeben sind und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ in } \varphi'$$

abgekürzt ist; ν bezeichnet die äußere Normale auf dem Oberflächenelement do.

Ein Medium der vorausgesetzten Art könnte man sich, ähnlich wie den Aether, zwischen discreten Kraftcentren, letztere etwa durch ponderable Moleküle gegeben, ausgebreitet denken; dann wären die äußern Kräfte und Momente von diesen ausgeübt und würden die Energie stets erhalten oder stets verzehren, je nachdem das Raumintegral in (10) ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit oder eine definite quadratische Form wäre. In beiden Fällen könnten die X, Y, Z, Λ, M, N nur von den Differentialquotienten der Verrückungen und der Drehungswinkel nach der Zeit abhängen.

Hält man diese Vorstellung von der Natur des betrachteten Mediums fest, so kommt von den Grenzbedingungen (4) die auf die Normalcomponenten der Verrückung bezügliche in Wegfall, weil in diesem Fall die Grenze durch die ponderabeln Theile gegeben ist, also feststeht; da das Medium keine innern Kräfte enthält, also der Compression nicht widersteht, hindert garnichts, in der Grenzfläche selbst eine verdichtete Schicht — eine Oberflächenbelegung im Sinne der Electricitätslehre — als möglich anzunehmen.

Wählt man die XY-Ebene zur Grenze, so reduciren sich also die Grenzbedingungen (4) auf

$$12)\qquad \overline{u}_h = \overline{u}_k, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_k,$$

während von (5) unter Rücksicht auf die Formeln (6) und (6′) und unter Benutzung der Bezeichnung (8) nur übrig bleibt

$$13)\qquad \overline{\Lambda}_h = \overline{\Lambda}_k, \quad \overline{M}_h = \overline{M}_k.$$

Die so erhaltenen Haupt- und Grenzgleichungen (9) bis (13) zeigen die allergrößte Verwandtschaft mit den Maxwell-Hertz'schen Formeln, und man kann sie leicht zur formellen Gleichheit führen.

Setzt man die Geschwindigkeitscomponenten

$$u' = U, \quad v' = V, \quad w' = W,$$

so erhält man sofort die allgemeinste Gestalt jener Formeln, wenn man Ξ, H, Z gleich linearen Functionen von U, V, W und U', V', W', und Λ, M, N gleich linearen Functionen von l, m, n setzt. Dabei kann man noch, um die Ausdrücke symmetrischer zu machen, die Trägheit, also ε, des Mediums verschwindend klein annehmen.

U, V, W entsprechen dann den Componenten der electrischen, Λ, M, N denen der magnetischen Kraft[1]).

Von besonderem Interesse ist die Anwendung der obigen Formeln auf die Optik.

Die Ueberlegenheit der electromagnetischen Lichttheorie über die mechanische lag bisher hauptsächlich in folgenden Punkten.

1) Sie lieferte ohne Zuhülfenahme der sog. Incompressibilitätsbedingung die Nothwendigkeit transversaler oder quasitransversaler Wellen.

2) Sie führte bei Krystallen ohne alle Hülfsannahmen sogleich auf die der Beobachtung entsprechende kleinste Zahl von optischen Constanten.

3) Sie gestattete, die natürliche Circularpolarisation durch conservative (d. h. Energie erhaltende) Kräfte zu erklären.

4) Sie gab ohne wesentliche Hülfsannahmen die nöthige Zahl von Oberflächenbedingungen. Daß sie letztere ganz ohne neue Hypothesen geliefert hätte, wie behauptet worden ist, trifft allerdings nicht zu; denn die ungeänderte Anwendung der für homogene Medien aufgestellten und bewährten Gleichungen, in denen sich die Constanten des Mediums nur außerhalb der Differentialquotienten nach den Coordinaten vorfinden, auf inhomogene, (nämlich auf die Grenzschichten) enthält gegenwärtig, wo directe Beobachtungen über inhomogene Medien noch nicht vorliegen, wenn sie sich auch plausibel machen läßt, immerhin eine Hypothese.

In allen diesen vier Punkten sind aber die obigen Formeln (9) bis (13) denen der electromagnetischen Theorie vollkommen gleichwerthig, wenn man nur für Ξ, H, Z und Λ, M, N, wie die Beobachtung verlangt, lineäre Functionen der Differentialquotienten von u, v, w einsetzt und sie so bestimmt, daß sie entweder die Energie stets erhalten oder stets vermindern.

ad 1) Ueberall, wo die Kräfte Ξ, H, Z die Form haben

$$\Xi = a\frac{\partial^h u}{\partial t^h}, \quad H = a\frac{\partial v}{\partial t^h}, \quad Z = a\frac{\partial^h w}{\partial t^h}$$

oder

$$\Xi = b\frac{\partial^h l}{\partial t^h}, \quad H = b\frac{\partial^h m}{\partial t^h}, \quad Z = b\frac{\partial^h n}{\partial t^h}$$

folgt aus (9) für periodische Bewegungen ohne Weiteres

$$14) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

---

1) Die Resultate besitzen vielfache Verwandtschaft mit den von Herrn Boltzmann (Wied. Ann. 48., p. 78, 1893) erhaltenen.

dies findet aber in isotropen Medien nach Symmetrie stets statt. In krystallinischen sind Abweichungen von dieser Bedingung möglich, die sich der Beobachtung entziehen; dasselbe gilt im electromagnetischen System.

ad 2) Ein System Energie erhaltender Momente ist nach Formel (10) gegeben durch den Ansatz

15) $$-\Lambda = \frac{\partial^{2h}}{\partial t^{2h}}(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

für $h = 0, 1, 2 \ldots$ und $a_{hk} = a_{kh}$. Diese Werthe führen auf die Fresnel'schen Gleichungen der Doppelbrechung mit Berücksichtigung der Dispersion.

Ein zweites System lautet

16) $$-\Lambda = \frac{\partial^{2h+1}}{\partial t^{2h+1}}(b_{12}m + b_{13}n)$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

für $n = 0, 1, 2 \ldots$ und $b_{hk} = -b_{kh}$. Es enthält drei Constanten und ist geeignet die Erscheinungen in magnetisch activen Körpern zu geben.

Energie verzehrende Momente liefert hingegen der Ansatz

17) $$-\Lambda = \frac{\partial^{2h+1}}{\partial t^{2h+1}}(c_{11}l + c_{12}m + c_{13}n)$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

für $n = 0, 1, 2 \ldots$ und $c_{hk} = c_{kh}$; er enthält sechs Constanten und führt auf die Gesetze der Absorption.

Aehnlich, wie hier Λ, M, N durch l, m, n kann man Ξ, H, Z durch u, v, w ausdrücken und erhält parallelgehende Systeme. Die electromagnetische Theorie bevorzugt bezüglich der conservativen Kräfte die durch Λ, M, N, bezüglich der absorbirenden die durch Ξ, H, Z gegebenen Glieder.

ad 3) Bisher ist so verfügt worden, daß in dem Raumintegral in (10) entweder

$$\Xi u' + Hv' + Zw'$$

oder

$$\Lambda l' + Mm' + Nn'$$

für sich ein Differentialquotient nach der Zeit oder eine definite quadratische Form wird. Man kann aber auch Ansätze machen, die erst beide Theile zusammen zu einem Differentialquotienten werden lassen.

Dies geschieht, indem man setzt

$$18)\quad \begin{aligned} -\Xi &= \frac{\partial^{2h}}{\partial t^{2h}}(e_{11}l + e_{12}m + e_{13}n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\Lambda &= \frac{\partial^{2h}}{\partial t^{2h}}(e_{11}u + e_{21}v + e_{31}w), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dieser Ansatz enthält neun Constanten und führt auf Erscheinungen, welche den bei natürlich activen Körpern beobachteten analog sind. Für isotrope Körper kann man specieller machen

$$19)\quad \begin{aligned} -\Xi &= e\frac{\partial^{2h}l}{\partial t^{2h}}, & -H &= e\frac{\partial^{2h}m}{\partial t^{2h}}, & -Z &= e\frac{\partial^{2h}n}{\partial t^{2h}}, \\ -\Lambda &= e\frac{\partial^{2h}u}{\partial t^{2h}}, & -M &= e\frac{\partial^{2h}v}{\partial t^{2h}}, & -N &= e\frac{\partial^{2h}w}{\partial t^{2h}}; \end{aligned}$$

hierdurch wird die rechte Seite der Gleichungen (9) zu

$$20)\quad -2e\frac{\partial^{2h}l}{\partial t^{2h}}, \quad -2e\frac{\partial^{2h}m}{\partial t^{2h}}, \quad -2e\frac{\partial^{2h}n}{\partial t^{2h}}.$$

Dies sind aber dieselben Formen, die Cauchy und Boussinesq zur Erklärung der natürlichen Circularpolarisation angewandt haben.

ad 4) ist nur darauf hinzuweisen, daß die Grenzbedingungen (12) und (13) mit den bei der electromagnetischen Theorie benutzten identisch sind. —

Die vorstehenden Entwickelungen stehen im engsten Zusammenhang mit den von mir über eine mechanische Ableitung der optischen Gleichungen früher angestellten Untersuchungen. Die in (9) auftretenden Glieder,

$$21)\quad \Xi,\ H,\ Z$$

einerseits,

$$22)\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right)$$

andererseits, sind die von mir als Kräfte erster und zweiter Art bezeichneten Componenten; aber die neue Betrachtungsweise deutet beide Theile anschaulich und giebt auch einen überzeugenden Grund dafür an, daß höhere Differentialquotienten nach den Coordinaten als zweite in den Bewegungsgleichungen nicht auftreten.

Außerdem führt sie für die Kräfte zweiter Art unmittelbar auf die Form (22), die früher nur durch Specialisirung eines allgemeineren Ansatzes mit Hülfe der aus der Beobachtung erschlossenen und immerhin hypothetischen Bedingung (14) gewonnen werden konnte. Damit hängt zusammen, daß sie unmittelbar auf die Grenzbedingungen (13) führt, die früher auf Umwegen abgeleitet werden mußten. Diesen Vortheilen gegenüber steht als Nachtheil die Nothwendigkeit einigermaßen specieller Annahmen über die Natur des schwingenden Mediums, insbesondere auch über die Constitution des freien Aethers; ohne solche dürfte man aber überhaupt zu einer mechanischen Deutung der Hertz-Maxwell'schen Gleichungen nicht gelangen.

Wie man indessen auch über diese Punkte denken möge: ein einfacher und anschaulicher Weg zu den optischen Differentialgleichungen in der allgemeinsten Fassung dürfte durch die vorstehenden Entwickelungen jedenfalls geliefert sein.

Göttingen, Februar 1894.

Mitteilungen über Fang und Lebensweise von Lepidosiren aus Paraguay.

Von

Dr. J. Bohls.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1894 durch Ehlers.

Anfang September vorigen Jahres gelang es mir, Lepidosiren in den im Innern des Chaco (das rechte Ufer des Paraguayflusses) befindlichen Sümpfen wieder aufzufinden. Im Paraguaystrome und seinen Nebenflüssen kommt er nicht vor; meine durch 2 Jahre angestellten Bemühungen, das Tier von den Fischern Asuncions und den weiter nordwärts am Paraguay wohnenden Indianern zu erhalten, waren vergeblich. Als ich später das Tier den Leuten vorwies, erklärten dieselben, es nicht zu kennen. Bei großen Ueberschwemmungen, die fast alljährlich den Chaco heimsuchen, gelangt der Lepidosiren allerdings gelegentlich in die Flüsse. So besitzt das Museum von Buenos-Ayres ein junges, etwa 20 cm langes Exemplar, das, wie mir Herr Dr. Berg sagte, in der Nähe von Corrientes, am Zusammenfluß von Paraná und Paraguay, gefangen ist. Aus Natterers Angaben geht hervor, daß die beiden von ihm mitgebrachten Stücke nur verschwemmte Exemplare gewesen sind. Hingegen scheint der Ucayale See, aus dem Castelnau den Lep. dissimilis erhielt, ein Ort zu sein, wo der sonderbare Dipnoër seine Lebensbedingungen findet. Beide Forscher fanden das Tier im Gebiete des Amazonenstromes; die von mir gesammelten Exemplare stammen dagegen aus dem La Plata-Gebiet. Meine Vermutung ist, daß der Wendekreis den Verbreitungsbezirk des Lepidosiren nach Süden abgrenzt; daß dagegen weiter nördlich das Tier überall in stehenden Gewässern, die einigermaßen tief sind, gefunden werden kann. Nur wird es schwer sein, das Tier aus den mit Pflanzen angefüllten Sümpfen und Seen zu erhalten, weil das Fischen mit Netz ausgeschlossen ist und auch vom Angeln kaum Erfolg zu erwarten ist. Nur mit Harpunen ist die Beute zu erlangen.

Ich selbst fand den Lepidosiren in einem sehr ausgedehntem Sumpfe, der etwas nördlich vom Wendekreise, 4 Tagereisen (circa 160 km) westlich vom Paraguayflusse gelegen ist. In dem umliegenden Gebiete, vom Ufer des Paraguay bis 8 Tagereisen in's Innere, wohnt ein Stamm der Lengua-Indianer, die noch fast ganz im Urzustande leben. Meinem Freunde Grubb habe ich es zu danken, daß es mir möglich gemacht wurde, jenen von Europäern sonst noch nicht besuchten Boden zu betreten.

An dem Sumpfe liegen 4 Indianer Toldos, je eine Tagereise von einander entfernt, deren Bewohner sich hauptsächlich von den dort erbeuteten Fischen ernähren. Die Männer gehen stets in Gesellschaft auf die Jagd. Am Sumpfe angelangt, wird ein großes Feuer angezündet, dann legen sie ihr Kleidungsstück ab und gehen nackt oder nur mit einem Lendenschurz bekleidet in das Wasser: so lange sie durch die niedrigen, spitzen Binsen und die hohen Papyrus wandern, geht es sorgfältig im Gänsemarsch; im tiefern Wasser, wo die sehr dicht stehenden „Peguahó“ (Verwandte des Heliconium) über 2 m den mit Azolla, Salvinia und schwimmenden Gräsern ganz bedeckten Wasserspiegel überragen, gehen sie in breiter Linie auf Rufweite auseinander und beginnen zu jagen. Als ich mit 10 Indianern im Sumpfe umherwatete, reichte das Wasser bei mittlerem Stande bis zur Hüfte.

Zum Jagen dient ein 2 m langer spitzer Speer, der in einem 2 Fuß langen Bambusgriff steckt. Früher wurde diese Waffe, ebenso wie Bogen, Pfeilspitzen und andere Geräte, aus dem harten Jacarandáholze gemacht; seit kurzem nimmt man jedoch nur noch den bleifederdicken Eisendraht, der in Südamerika allgemein zu Einfriedigungen benutzt wird. Die Indianer gebrauchen den Speer, indem sie im langsamen Weiterschreiten fortwährend nach allen Seiten in den Boden stechen. Durchbohren sie dabei zufällig einen Lepidosiren, Symbranchus oder einen andern Fisch, so ziehen sie denselben an die Oberfläche, töten ihn mit einer kleinen Holzkeule durch feste Schläge auf den Kopf und nehmen ihn vom Speer ab. Dann wird mit dem letztern Instrument ein Loch hinter dem Kopfe gestoßen und mit Hülfe einer Holznadel ein dicker Bindfaden hindurchgezogen; diese lange Schnur wird nun um den Leib geschlungen und die Beute beim Weiterschreiten im Wasser nachgezogen. So kann ein Mann eine ganze Anzahl der schweren Fische mit sich schleppen, ohne durch die Last im Jagen behindert zu werden. Haben die Indianer 4—5 Stunden im Wasser umhergewatet, so gehen sie zu ihrem Feuer zurück, schneiden die Beute auf und nehmen die Eingeweide heraus. Besonders behutsam wird

mit den großen Eierstöcken der Lepidosiren umgegangen (die gelbgefärbten Eier werden größer wie eine Erbse). Der daraus gefertigte Kuchen und das im Schwanze abgelagerte gelbe Fett wird von ihnen dem lachsartig schmeckenden Fleische vorgezogen. Die Eier werden zu einem Kuchen gebacken, der am Feuer gedörrt wird und als Reiseproviant dient. Ich habe einigemale Lepidosiren, die zur Conservirung ungeeignet waren, gegessen und muß gestehen, daß ich in diesem Falle in Bezug auf die Schmackhaftigkeit des Fleisches mit den Indianern übereinstimmte.

Die Lenguas nennen das Tier Loălắch.

Seine Nahrung bildet eine Sumpfschnecke (Ampullaria), die recht ansehnliche Dimensionen, bis zur Dicke einer Mannesfaust erreicht. Dieselbe lebt in großen Massen in allen stehenden Gewässern Paraguays und des Chacos; sie verrät ihre Anwesenheit durch die großen auffälligen rosenroten Eihaufen, die an Wasserpflanzen bis 1 m über dem Wasserspiegel angeklebt sind. Die eigentümlichen starken und scharfen Zahnplatten machen den Lepidosiren geeignet, die harte Schale des Tieres, dem sonst nur noch Raubvögel beikommen können, zu zertrümmern. Im Darm fand ich Leiber und Deckel der Schnecken. Letztere traten, wenn nach dem Abtöten der Dipnoër mit der Hand der Entleerung des Darmes wegen gewürgt wurde, mit dem schwarzen Kote heil aus der großen Afteröffnung heraus. Neben den Tierkörpern fand sich auch Gras im Darm; es ist möglich, daß der Lepidosiren neben animalischer Kost sich auch von Pflanzen nährt; doch neige ich zu der Annahme, daß das vorgefundene Gras nur zufällig mit den Schnecken, die dasselbe fraßen, aufgenommen ist.

Vor den mächtigen Zähnen des Fisches haben auch die Indianer Respekt; sie hüten sich dem lebenden Tiere die Hand vor das Maul zu halten.

Nur wenige der von mir gesehenen Lepidosiren waren ganz unverletzt; zuweilen fehlt eine Extremität und meist ist der Schwanz verletzt. Manche der kleinen Wunden werden von den durchaus nicht friedlichen Artgenossen herrühren; mehreren großen Exemplaren, die mir durch die Hände gegangen sind, war das ganze hintere Körperende vom After an regeneriert. Solch einen gefährlichen Biß kann nur das Jacaré (Alligator sclerops) ausgeführt haben, der sich hauptsächlich von den Fischen nährt.

Beim Jagen des Lepidosiren tritt man zuweilen in tiefe Löcher, in denen man, wenn das Wasser vorher auch nur bis zum Gürtel gereicht hat, fast bis zum Halse versinkt. Die Indianer sagen, daß dieses „die Häuser der Loălắch“ sind, die er im Schlamme

wühlt und deren Wandung er durch Pressen mit dem Kopfe festigt. Ob der Lepidosiren, wie der Protopterus, zeitweilig ganz im Trocknen lebt und ausdauert, kann ich nicht sicher angeben. Wenn es sehr heiß ist und wenig Regen fällt — die Trockenzeit des Chaco ist schwankend — sind fast alle Gewässer wasserleer; der Lepidosiren müßte wie der Symbranchus und einige Siluriden, die mit ihm zusammenleben, absterben, falls er nicht die Fähigkeit besäße, im Trocknen zu leben.

Die Bedeutung der Lunge als Respirationsorgan kennzeichnet sich bei den lebendfrisch geöffneten Tieren durch die hellrote Farbe, die sie dem arteriell gewordenen Blut verdankt.

Natterer wurde erzählt, daß sein Lep. paradoxa einen Laut von sich gebe, ähnlich dem einer Katze. Die von mir gehaltenen knurrten beim Anfassen, ein Laut, der erzeugt wurde durch Auspressen der Luft aus den engen Kiemenöffnungen.

Eigentümlich ist die Grünfärbung des Alkohols durch den Fisch, die selbst noch nach Monaten eintritt, wenn auch der Alkohol mehrere Male gewechselt ist.

Leider mußte ich im Oktober dicht vor dem Beginn der Laichzeit den Chaco verlassen. Die Eierstöcke der Weibchen waren schon stark geschwollen; doch waren abgelegte Eier nicht aufzufinden. Versuche, die Tiere lebend an das Ufer des Paraguay zu transportieren oder sie in einem ausgegrabenen Wasserloche zur Eiablage zu bringen, scheiterten. Ich konnte nur Tiere bekommen, die durch den Speer verwundet waren; dieselben gingen am 2ten oder 3ten Tage regelmäßig ein.

Ueber Lepidosiren paradoxa Fitz. und articulata n. sp. aus Paraguay.

Von

E. Ehlers.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1894.

Der Freundlichkeit des Herrn Dr. J. Bohls, der mir bereits im November 1893 aus Asuncion das Auffinden von Lepidosiren gemeldet hatte, verdanke ich die Gelegenheit, eine größere Anzahl der von ihm gesammelten Stücke dieses in unseren Sammlungen seltenen Fisches durchmustern, einige in Untersuchung nehmen zu können. Meine dabei gemachten Beobachtungen theile ich hier vorläufig mit und behalte mir Weiteres nach Abschluß der in Angriff genommenen Untersuchungen vor[1]).

Da Herr Dr. Bohls, wie aus der voranstehenden Mittheilung sich ergiebt, die Thiere im Bereiche des Paraguay-Flusses gefunden, die wenigen von Natterer und Castelnau gesammelten aus dem Zuflussgebiet des Amazonenstromes stammten, war die Frage nicht abzuweisen, ob die von Herrn Dr. Bohls vorgelegten Thiere identisch mit den in Brasilien gesammelten Fischen seien. Für eine Entscheidung in dieser Sache standen mir einerseits 30 Stück der paraguaischen Fische zu Gebot, während ich andererseits nur auf die von Natterer, Bischoff, Hyrtl und Castelnau gemachten Mittheilungen zurückgreifen konnte.

Daß es sich bei den mir vorgelegten Thieren um eine Lepidosiren handelt, darüber entschied der äußere Habitus sofort in bestätigender Weise; das Gesammtbild, welches die vorhandenen

---

1) Eine Zusammenstellung der Lepidosiren paradoxa Fitz. behandelnden Literatur hat G. Baur gegeben (Ueber Lepidosiren paradoxa Fitzinger. Zoolog. Jahrbücher Bd. II. 1887, pg. 575.) Zur Ergänzung füge ich hinzu, daß die in dem gegebenen Literaturverzeichniß unter 18 und 19 aufgeführten Titel zu ein und demselben Werke Castelnaus als allgemeiner und besonderer Titel gehören; das Werk war Baur nicht zugänglich gewesen.

Abbildungen von Natterer, Bischoff und Castelnau geben, ließ daran nicht zweifeln. Nur erreichten die mir vorliegenden Thiere nicht die von Natterer mit 3 Fuß 9 Linien angegebene Länge; der größte von mir gemessene Fisch war 72 cm. lang. Doch sagte mir Herr Dr. Bohls, daß er bei den Schwierigkeiten, mit denen die Conservirung der Thiere und ihre Weiterbeförderung zu kämpfen gehabt habe, genöthigt gewesen sei, von dem Mitbringen der großen Fische abzusehen. Die größten Thiere, die er gesehen, seien etwas über 1 m. lang und diese alle Weibchen gewesen; das größte Männchen war 92 cm. lang. Im Leben seien die Thiere viel dunkler als nach der Conservirung gewesen, fast schwarz, mit starkem Schleim bedeckt schlüpfrig wie ein Aal.

Beim Eingehen auf Einzelheiten zeigt sich bald, daß die Thiere, die mir vorliegen, unter einander abweichen. Der größere Theil von ihnen, im Ganzen 27 Stück, besitzt Besonderheiten, die von keinem der Beschreiber der Lepidosiren paradoxa erwähnt werden, und die es wahrscheinlich machen, daß dieser Fisch nicht mit diesen hier vorliegenden identisch ist; diese halte ich für Vertreter einer bisher unbeschriebenen Art, die ich Lepidosiren articulata nenne. Fünf andere Fische zeigen dagegen eine Bildung, die durchaus an die Darstellung erinnert, welche Natterer, Bischoff und Castelnau von Lepidosiren paradoxa gegeben haben. Ich ziehe sie daher zu dieser Art. Die von Castelnau aufgestellte Art, L. dissimilis sehe ich nach Günthers Darlegung für identisch mit Lepidosiren paradoxa an.

Ich gebe nun zuerst die Dimensionen von zwei fast gleich großen Männchen beider Arten.

Lepidosiren	articulata	paradoxa
Ganze Länge	57 cm.	57,5 cm.
Abstand des Afters von der Schnauzenspitze	40,1 cm.	40 cm.
„ „ vorderen Augenrandes von der Schnauzenspitze	2,1 cm.	1,5 cm.
Abstand des hinteren Mundwinkels von der Schwanzspitze	2,5 cm.	1,5 cm.
Abstand der Kiemenöffnung von eben daher	6,5 cm.	5,3 cm.
Innerer Abstand der Augen von einander	2,4 cm.	2,05 cm.
Durchmesser des Auges	0,3 cm.	0,3 cm.
Höhe der Kiemenöffnung	1 cm.	0,8 cm.
Länge der vorderen Extremität	2,6 cm.	3,1 cm.
Höhe der Basis der vorderen Extremität	0,4 cm.	0,2 cm.
Dicke „ „ „ „ „	0,2 cm.	0,1 cm.
Länge der hinteren Extremität	3,8 cm.	4,9 cm.

Lepidosiren	articulata	paradoxa
Höhe der Basis der hinteren Extremität	0,8 cm.	0,5 cm.
Dicke „ „ „	0,9 cm.	0,3 cm.
Länge der Afteröffnung	0,6 cm.	0,6 cm.
Umfang hinter der vorderen Extremität	15,5 cm.	14 cm.
„ vor der hinteren Extremität	16 cm.	14 cm.

In diesen Zahlen, die nur bedingten Werth haben, kommen Unterschiede zu Tage, die sich im Gesammthabitus deutlich ausprägen. Daß L. articulata etwas dicker als L. paradoxa erscheint, kann auf ungleichen Ernährungs- oder Conservirungszustand zurückgehen und ist vorläufig außer Acht zu lassen. Dagegen sind die Unterschiede am Kopf und an den Extremitäten davon unabhängig. Der Schnauzentheil des Kopfes ist bei Lepidosiren paradoxa kürzer und stärker kegelförmig verjüngt als bei L. articulata; der Abstand des Auges und des hinteren Mundwinkels von der Schnauzenspitze ist bei ersterem kleiner als bei letzterem; bei Lepidosiren paradoxa liegt der hintere Umfang des Auges fast über dem hinteren Mundwinkel, bei L. articulata eine Strecke weiter vor diesem. Eine Linie vom vorderen Umfang des Auges horizontal gegen den Schnauzenrand gezogen, trifft diesen bei L. paradoxa auf dem abfallenden Seitentheile und hat in der Länge das Vierfache des Augendurchmessers, während sie bei L. articulata auf den breiten Vorderrand der Schnauze trifft und sechsmal so lang als der Durchmesser des Auges ist. — Durch den größeren Abstand der Kiemenöffnung von der Schnauzenspitze erscheint der ganze Kopftheil der L. articulata länger als bei L. paradoxa. Bei dieser ist die Hinterhauptsgegend stärker als bei L. articulata gewölbt; die Profillinie fällt damit bei L. paradoxa stärker gegen die Schnauzenspitze hin ab als bei L. articulata, und es erhält damit der Kopf der Lepidosiren paradoxa die spitzere Kegelform, wie sie in den Abbildungen von Natterer, Bischoff und Castelnau heraustritt. Das kommt besonders zu Tage, wenn man die Köpfe beider Fische bei einer Scheitelansicht mit einander vergleicht. Dann erscheint L. paradoxa spitz schnauzig, indem der vor der Verbindungslinie der Augen liegende Kopftheil spitz kegelförmig ist, während die weniger verschmälerte Schnauze der L. articulata stumpf abgerundet ist. Diese durch die Verhältnisse der Skeletttheile bedingten Unterschiede der Kopfform sind danach als feste anzusehen.

Die angegebenen Maasse zeigen einen Unterschied beider Arten in der Größe der Extremitäten, von denen die hintere bei beiden sexuell dimorph ist. Allein diesen Unterschieden ist kein

großer Werth beizulegen, da die Größe der Extremitäten zu variiren scheint, und durch Verletzungen, die ausgeheilt werden, beeinflußt wird. Die Extremitäten der Lepidosiren paradoxa sind im Allgemeinen länger und schlanker als die der L. articulata; bei beiden Arten ist die hintere stärker als die vordere, und an ihr tritt der Unterschied beider Arten besonders zu Tage, da sie bei L. articulata meist dicker ist als bei Lepidosiren paradoxa, wo sie schlank kegelförmig ist. Die vorderen Extremitäten der Lepidosiren articulata waren meist abgeplattet und mit schwachem Randsaume versehen. Das war bei denen von Lepidosiren paradoxa nicht so ausgeprägt. Die hinteren Extremitäten der Männchen von L. articulata sind länger und dicker als bei den Weibchen der gleichen Art, auch wohl dicker als die von L. paradoxa. Vor allem auffällig ist aber, daß während bei den Weibchen der L. articulata die hinteren Extremitäten völlig glatt sind, wie das auch auf den Abbildungen des Weibchens von Lepidosiren paradoxa dargestellt ist, sie bei den männlichen Thieren auf dem median- und dorsalwärts gewandten Umfange einen dichten Besatz von hellfarbigen dichtgedrängt stehenden blattförmig abgeplatteten Papillen tragen, die büschelweise auf gemeinsamer Basis stehen. Die Entwicklung dieser Papillen war am stärksten bei den größten Thieren, wo sie einen dichten bürstenartigen Besatz bildeten, der mit Ausnahme einer kurzen basalen Strecke die ganze Länge der Extremität einnahm. In anderen Thieren war nur eine mittlere Strecke der Extremität von den Papillen bedeckt, und in kleineren Exemplaren fand sich nur ein niederer Saum von ihnen vor. Der männliche Lepidosiren paradoxa hat diese Bildung gleichfalls, und in gleichem Wechsel wie Lepidosiren articulata; nur ist die blattförmige Form der Papillen nicht so ausgesprochen, diese sind mehr fadenförmig gestaltet. Da von dem früher untersuchten Weibchen der Lepidosiren paradoxa eine solche Ausrüstung der hinteren Extremität nicht erwähnt ist, so ist wohl sicher anzunehmen, daß auch bei dieser Art hierin ein Geschlechtscharakter ausgedrückt ist.

Die unpaaren Flossensäume stimmen bei beiden Arten überein und verhalten sich, wie früher von Lepidosiren paradoxa angegeben ist.

Der Abstand des Afters von der Schnauzenspitze ist bei den gemessenen Exemplaren nahezu gleich; dagegen ist die Lage des Afters auffallender Weise variabel. Bischoff und Castelnau zeichnen ihn auf der linken Körperseite lateral von der Medianebene gelegen. Diese Lage hat er unter den mir vorliegenden Thieren von Lepidosiren articulata bei 11 Männchen,

während er bei 12 Männchen und bei 2 Weibchen auf der rechten Körperhälfte liegt. Von Lepidosiren paradoxa zeichnen Natterer Bischoff und Castelnau den After auf der linken Körperseite des weiblichen Thieres, während ich ihn bei drei Männchen links, bei zweien dagegen rechts liegend traf. Danach wechselt die Lage der Afteröffnung und ist für Artkennzeichnung und wohl auch als Geschlechtscharakter nicht zu verwerthen.

Die Oberhaut beider Arten zeigt einen Unterschied, der mir charakteristisch zu sein scheint. Bei Lepidosiren paradoxa tritt die Beschuppung deutlich hervor; ist auf den Kopf bis nach vorn zu verfolgen; auffallender Weise sind die Ränder der Schuppen im Bereiche des Kopfes nach vorn gerichtet, wie das auch Natterer abgebildet hat; nach der Bauchseite hin nehmen die Schuppen an Größe ab. — Bei Lep. articulata ist die Beschuppung von einer sehr viel stärkeren Epidermis als bei Lep. paradoxa, und zwar in beiden Geschlechtern gleichmäßig bedeckt; daher treten die Grenzen der einzelnen Schuppen sehr viel weniger zu Tage; der Beschuppung entsprechend ist die Oberfläche am Rumpfe von bald mehr bald weniger regelmäßig gekreuzten Furchen und Runzeln bedeckt, am Kopfe und auch am Schwanze sowie dem unpaaren Flossensaume ganz glatt. Doch fanden sich auch Exemplare, bei denen die Körperoberfläche fast durchweg glatt war. Ich würde geneigt sein, diesen Unterschied nicht als einen specifischen anzusehen, sondern ihn auf Conservirungszustände zurückzuführen, wenn nicht alle fünf Stücke der Lepidosiren paradoxa sich auffallend dadurch von den übrigen Stücken der Lep. articulata unterschieden hätten.

Die Farbe der Lep. articulata ist meist ein gleichförmiges schiefergrau; bei Lepidosiren paradoxa ist zumal am vorderen Theile und besonders auf der Bauchfläche ein fleckiges Aussehen vorhanden, da die Randtheile der Schuppen dunkler als ihre Mitten sind. Eine ähnliche Zeichnung habe ich auch an einem Stücke von Lep. articulata gesehen, wo dunkle Flecke reihenweise auf der Bauchfläche standen. Das von Hyrtl zerlegte Exemplar der Lepidosiren paradoxa hat ähnliche Zeichnung gehabt.

Bei den mir vorliegenden Lepidosiren paradoxa ist das System der Seitenlinien nicht deutlich zu erkennen. Um so besser bei einem Weibchen von Lep. articulata. Am Rumpfe sind zwei Seitenlinien vorhanden, die beide vom Kopf her über den After hinaus auf den Schwanz, die untere bis über dessen halbe Länge hinaus verlaufen. Die obere Linie steht etwa auf der unteren Grenze des oberen, die untere auf der oberen des unteren Viertels der ganzen

Höhe, die obere liegt bei einigen Thieren in einer eingesunkenen Rinne. Jede Linie ist vielfach unterbrochen, aus bald längeren bald kürzeren Theilstücken zusammengesetzt. Von jeder zweigen in gleichen Abständen hintereinander, die mir der Metamerie des Rumpfes zu entsprechen scheinen, unter rechtem Winkel kurze Seitenäste ab, die gegen die ventrale und dorsale Medianlinie gerichtet sind, zum Theil auch mit ganz kurzen Fortsätzen in entgegengesetzter Richtung den Hauptstamm überkreuzen; ich zählte auf der rechten Körperseite an der unteren Linie 9 solche Seitenäste, an der oberen nur acht; auf der linken Körperseite war viel weniger davon zu sehen. Das Liniensystem am Kopf entspricht in seinen allgemeinen Zügen den auf den vorhandenen Abbildungen von Lepidosiren paradoxa dargestellten; seine Einzeldarstellung bleibt für später mit Beifügung von Abbildungen vorbehalten; ich unterscheide einen Opercularbogen, in der die untere Seitenlinie einmündet, und der mit seiner Convexität nach hinten auf die Höhe der Kiemenspalte reicht; einen Mandibularbogen, der dicht unter dem Rande des Unterkiefers den Mundwinkel umfassend läuft, und einen Orbitonasalbogen, der mit der oberen Seitenlinie in Verbindung steht und mit einer oberen und unteren gewundenen Linie das Auge umfaßt und auf dem vorderen Ende der Nasenkapsel bogenförmig nach vorn convex abschließt. Alle diese Linien sind mehr oder weniger unterbrochen. Auf der Mitte der Hinterhauptsregion stehen in fast gleichen Abständen hinter einander kurze quere Linien. — In jedem Theile der Seitenlinie sieht man mit der Lupe auf dunklem Grunde kleine weiße Fleckchen in gleichmäßigen Abständen von einander, offenbar die nervösen Terminalapparate. Die Schuppen, welche auf den Seitenlinien liegen, sind nicht durchbohrt; die Linie zieht in dem vorderen Theile des Integumentes, von dem der freie Schuppentheil in die Tiefe geht.

Einen Unterschied zwischen den beiden Arten, der wohl von Bedeutung ist, bieten die vorderen Nasenlöcher. In den Abbildungen, die darüber von Lepidosiren paradoxa vorliegen, sind das quer ovale, wenig von einander getrennte Oeffnungen. Das stimmt zu dem Verhalten, das ich bei dem von mir so gedeuteten Fischen sehe. Bei Lep. articulata sind dagegen die beiden vorderen Nasenlöcher durch einen vom Rande der Oberlippe zwischen sie in die Mundhöhle ziehenden dreieckigen Fortsatz getrennt; das Nasenloch ist kreisrund und an seinem vorderen Rande steht eine kegelförmige Papille. Eine flache Papille finde ich aber auch bei L. paradoxa.

Der Schädel der Lep. articulata zeigt nur geringfügige Abweichungen von den Abbildungen, die Bischoff und Hyrtl gegeben haben. Ich werde sie später darstellen. Die 5. knorpeligen Kiemenbögen liegen jederseits frei in der Schlundwand, ohne unter einander durch eine Copula oder mit dem Schädel verbunden zu sein; eine Bestätigung der für die Kiemenbögen von Lepidosiren paradoxa von Hyrtl gemachten Angaben.

Die Wirbelsäule der Lep. articulata besitzt 55 Rippenpaare, übereinstimmend mit der Zahl, die Bischoff für Lep. paradoxa angegeben hat. Das Ende der Wirbelsäule läuft in der monocerken Schwanzbildung mit gleichmäßiger Abnahme aller Theile zugespitzt aus. Die Abbildung, welche Bischoff von dem Ende der Schwanzwirbelsäule der Lepidosiren paradoxa gegeben hat, stammt sehr wahrscheinlich von einem Thiere, das die Schwanzspitze verloren und unvollständig regenerirt hatte; so erklärt sich der dort gezeichnete plötzliche Abbruch des hinteren Endes der Chorda.

Von besonderer Bedeutung sind die Befunde am Extremitäten-Skelett. Die Bögen entsprechen bei beiden mir vorliegenden Arten den Abbildungen, die darüber von Lepidosiren paradoxa gemacht sind. Bei den von mir so gedeuteten Thiere ist auch das Skelett der Gliedmaßen ein einfacher ungegliederter Knorpelstab. Dagegen ist bei L. articulata dieser Skeletttheil deutlich gegliedert, und zwar sowohl an der vorderen wie an der hinteren Extremität, die Glieder sind im basalen Theil am größten und nehmen gegen die Spitze zu an Größe ab. Bei dem Mänchen dieser Art ist in der hinteren Extremität das basale Stück auffallend vergrößert und schwach gekrümmt, die darauf folgenden Endglieder sind klein, und machen in ihrer Vereinigung den Eindruck eines gegliederten, einem größeren Basalgliede aufsitzenden Strahles. Dies besondere Verhalten ist aber an einer größeren Zahl von Exemplaren zu prüfen, da hier im Einzelfalle eine durch Verletzung und Ausheilung entstandene Bildung vorliegen könnte.

Aus der inneren Organisation kann ich zur Zeit nur mittheilen, daß das wabige Bindegewebsgerüst, das Hyrtl aus dem vorderen Rumpftheile abbildet, sich bei L. articulata an gleicher Stelle, aber auch im hinteren Rumpftheile außerhalb des Peritonaeums findet. Ich hege die Vermuthung, daß es sich dabei um Lymphsackbildungen handelt.

Das Bild der in der Leibeshöhle liegenden Eingeweide des Weibchens von L. articulata stellt sich mir anders dar, als es Hyrtl abbildet. Die Eierstöcke, die anscheinend metamer eingeschnitten sind, werden der Länge nach von einer gelben Fett-

falte eingehüllt und erinnern damit an die ähnlich gelagerten Hoden des männlichen Thieres. Die Differenz meines Befundes und der Hyrtl'schen Darstellung ist aber wohl eine physiologische. Von dem ausgezeichneten Wiener Anatomen ist vermuthlich ein in voller Geschlechtsreife stehendes Weibchen zergliedert, bei dem die Fettmassen geschwunden waren, während das von mir geöffnete Thier von der Vollreife entfernte Eierstöcke, dafür aber aufgespeicherte Fettmassen besaß.

Vor der Hand ergeben sich für die beiden Arten folgende Diagnosen:

Lepidosiren paradoxa Fitz, mit deutlicher Beschuppung; Schnauze kegelförmig, Nasenlöcher quer oval; Gliedmaßen mit ungegliedertem Knorpelstab.

Lepidosiren articulata n. sp. Beschuppung mehr oder minder von starker Epidermis verdeckt, Kopf und Schnauze länger als bei L. paradoxa, vorn stumpf abgerundet; Nasenlöcher kreisrund mit kegelförmiger Papille; Gliedmaßen mit gegliedertem Knorpelstab.

Die Untersuchungen von Gauss in der Theorie der elliptischen Functionen.

Von

P. Günther.*)

Vorgelegt von H. Weber in der Sitzung vom 14. April 1894.

In dem ersten jener Briefe, in denen Jacobi seine neue Theorie der elliptischen Functionen dem Altmeister Legendre mitteilt, erwähnt er u. a., er habe erfahren, daß Gauss schon seit dem Jahre 1808 einen Teil der von Jacobi 1827 veröffentlichten Resultate besitze. Legendre bezweifelt dies, auch einer nochmaligen Versicherung Jacobi's gegenüber, wobei er sich von seiner Animosität gegen Gauss zu harten Ausfällen hinreißen läßt; er erklärt es für unglaublich, daß jemand Entdeckungen von solcher Tragweite gemacht haben sollte, ohne an ihre Veröffentlichung zu denken.

Aber unmittelbar darauf mußte es jedem, der sich mit der neuen Theorie eingehend beschäftigte, klar werden, daß Gauss in der That schon vor vielen Jahren eine tiefe Einsicht in die Theorie der elliptischen Functionen erlangt hatte; wurde doch jene Bemerkung in der VII. Section der Disquisitiones arithmeticae, daß das

---

*) Die nachstehende Abhandlung hat der Verfasser bei Gelegenheit seiner Habilitation an der Berliner Universität am 24. Juli 1890 vor der philosophischen Facultät vorgetragen; auf den Rat von Herrn Weierstraß beabsichtigte er ursprünglich, über den behandelten Gegenstand auf der Bremer Naturforscher-Versammlung einen Vortrag zu halten, und dann später die in dieser Arbeit niedergelegten Gedanken ausführlich zu begründen und alle Entwicklungen in extenso zu geben. Er war damit, wie seine Freunde wissen, bis zur Niederschrift fertig. Leider wurde er durch ein schweres Leiden, von welchem ihn am 27. September 1891 der Tod erlöste, verhindert, seinen Plan zu verwirklichen. Aber auch ohne diese Entwicklungen dürfte die textgetreue Wiedergabe des Vortrages von Interesse sein; löst sie doch, zum Teil wenigstens, die Schuld ein, welche gegen Gauss hinsichtlich seiner Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten bis heute besteht.

Rittergut Glowe bei Friedland N.-L., im Februar 1894.

A. Gutzmer.

Princip, auf welchem die Kreisteilung beruht, auch auf die Teilung der Lemniscate und noch allgemeiner anwendbar sei, durch die erste große Abhandlung Abel's — um mich der Worte Dirichlet's in seiner Gedächtnisrede auf Jacobi zu bedienen — „zu einem unwidersprechlichen Zeugnisse dafür, daß Gauss, seiner Zeit weit vorauseilend, schon zu Anfang des Jahrhunderts das Princip der doppelten Periode erkannt hatte“.

Freilich hat Gauss niemals Veranlassung genommen, seine ausgedehnten Untersuchungen über die elliptischen Functionen vollständig zu veröffentlichen; nur bei zwei Gelegenheiten hat er vereinzelte Resultate aus diesem Gebiete mitgeteilt: einmal (1808) in der Abhandlung „Summatio quarundam serierum singularium“, allerdings ohne anzugeben, daß die Reihen und Producte, welche hier untersucht werden, der Theorie der elliptischen Functionen angehören; sodann (1818) in der Arbeit „Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta etc.“, in welcher die sogenannte Gauss'sche Transformation zweiten Grades und ihre Anwendung auf die Berechnung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung auseinandergesetzt wird.

Abgesehen von diesen Mitteilungen liegen uns die Gauss'schen Arbeiten über die elliptischen Functionen nur im Nachlasse vor, und größtenteils in der Form zusammenhangsloser Aufzeichnungen, so daß wir in Bezug auf den Gang der Herleitungen vielfach nur auf Vermutungen angewiesen sind.

Als die frühesten hierher gehörigen Untersuchungen müssen wir zweifellos diejenigen über das arithmetisch-geometrische Mittel ansehen. Nach einer von Herrn Schering erwähnten Aeußerung von Gauss hat er schon 1794, also im Alter von 17 Jahren, die Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und den Potenzreihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, gekannt, mit anderen Worten, die Entwicklung des completen elliptischen Integrals erster Gattung K nach Potenzen der Größe q, welche in den zugehörigen ϑ-Functionen auftritt.

Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels steht bekanntlich in sehr engem Zusammenhange mit der Transformation zweiten Grades der elliptischen Functionen, insofern die Bestimmung der zugehörigen Modulnkette vermittelst dieses Algorithmus geschehen kann; es ist nämlich das Complement des zweiten Moduls der Kette gleich dem Quotienten des arithmetischen und des geometrischen Mittels zwischen 1 und dem Complement des ersten Moduls. Der erste Entdecker dieser Transformation, Landen, welcher sie 1775 veröffentlichte, hat allerdings nicht den Algo-

rithmus in der bekannten Form angegeben, wohl aber hat dies Lagrange gethan, der 1784 diese Transformation, anscheinend unabhängig von Landen, noch einmal auffand; bei ihm finden wir ganz explicit den Algorithmus und seine Anwendung auf die Bestimmung der Modulnkette.

Es ist nun in den bisherigen Darstellungen der Geschichte der elliptischen Functionen der Umstand noch niemals hervorgehoben, daß auch Gauss den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels in Beziehung gesetzt hat zu einem anderen [1]), welcher durch eine einfache, auch bei Gauss sich findende trigonometrische Substitution [2]) in denjenigen der Landen'schen Transformation übergeht. Will man nun nicht annehmen, daß Gauss diese Transformation von Landen oder Lagrange oder auch aus der Arbeit von Legendre, der sie 1786 in den Memoiren der Pariser Akademie weiter behandelt hatte, einfach übernommen habe, so bleiben, wie es scheint, nur zwei Möglichkeiten übrig: entweder hat Gauss die Transformation in derselben Form wie Landen und Lagrange selbständig durch Betrachtung der Integrale entdeckt und sie dann aus praktischen Gründen zu jenem Algorithmus umgeformt; oder er hat zunächst den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels gefunden und ist von diesem aus, glücklich verallgemeinernd, in ähnlicher Weise zu dem zweiten Algorithmus fortgeschritten, wie man von den quadratischen Formen zu den bilinearen gelangt, denn so etwa verhalten sich die Gleichungen beider Algorithmen zu einander [3]). Nach dieser letzteren Annahme würde dann der Zusammenhang mit den elliptischen Integralen sich erst secundär aus den Gesetzen des Algorithmus ergeben haben.

Die Entscheidung über diese drei Möglichkeiten wird mit voller Sicherheit schwerlich zu treffen sein; aber man muß überhaupt hierbei im Auge behalten, daß die Bedeutung der Transformation selbst durchaus zurücktritt gegenüber der Bedeutung der Folgerungen, welche Gauss aus den beiden in ihr vereinigten Algorithmen zu ziehen gewußt hat; auch wenn ihm in diesem einen Punkte die selbständige Erfindung vielleicht abgesprochen werden muß, so bleibt doch sein Ruhm, die elliptischen Functionen drei Jahrzehnte vor Abel und Jacobi entdeckt zu haben, ungeschmälert für alle Zeiten bestehen.

Die erwähnten Folgerungen sind, wie ich bereits hervorgehoben habe, zuvörderst an den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels geknüpft. Dieser bestimmt eine unendliche Reihe von Größenpaaren a, b durch die Bedingung, daß jedes a das arithmetische, jedes b das geometrische Mittel zwischen den Größen

des vorhergehenden Paares sein soll; die gemeinsame Grenze, gegen welche die beiden Reihen der a und der b convergiren, heißt dann das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen den Größen des ersten und natürlich auch jedes folgenden Paares.

Aus einer vorhin gemachten Bemerkung folgt, daß alle Quotienten $\frac{b}{a}$ als die complementären Moduln $\varkappa'$ einer Kette Landen'scher Transformationen angesehen werden können; bezeichnet man nun die entsprechenden Moduln $\varkappa$ selbst mit $\frac{c}{a}$, so wird hierdurch eine dritte unendliche Reihe von Größen c definirt, welche zu den beiden ersten Reihen in leicht zu übersehender Beziehung steht. Auf die gleichzeitige Betrachtung der beiden zu einander complementären Moduln wird man auch geführt, wenn man, wie dies Gauss in einer nachgelassenen Abhandlung vom Jahre 1800 thut[4]), den Zusammenhang des Algorithmus mit den elliptischen Integralen unabhängig von der Landen'schen Transformation begründet. Für den reciproken Wert des arithmetisch-geometrischen Mittels zwischen 1 und $\varkappa$ ergiebt sich nämlich eine hypergeometrische Reihenentwicklung nach Potenzen von $\varkappa'$, welche einerseits auf die bekannte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung führt, andererseits erkennen läßt, daß dieser Wert gleich der Größe $\frac{2}{\pi}K'$ ist; ebenso wird dann der reciproke Wert des arithmetisch-geometrischen Mittels zwischen 1 und $\varkappa'$ gleich $\frac{2}{\pi}K$.

Daher wird in dem homogenen Algorithmus der Größen a, b, c der Quotient des arithmetisch-geometrischen Mittels zwischen a und b, dividirt durch dasjenige zwischen a und c, die Größe $\frac{K'}{K}$ oder $-\frac{1}{\pi}\log q$ oder $\frac{w}{i}$, wenn $q = e^{w\pi i}$ gesetzt wird. Die Reihenentwicklung, welche Gauss für diese Größe w herstellt[5]), liefert sofort jene bekannte Darstellung von q als unendliches Product mit Hülfe der Moduln einer Kette von Transformationen zweiten Grades, wie sie Jacobi in den Fundamenten und in der Abhandlung „Ueber die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmäßigsten Formeln“ giebt[6]).

Der Grundgedanke der Gauss'schen Deduction ist nun folgender: die sämtlichen im Algorithmus auftretenden Größen a, b, c hängen von zwei Veränderlichen ab; hierfür werden zuerst die Größen a, b des ersten Paares genommen, nunmehr aber die beiden

Mittel zwischen a und b einerseits, a und c andererseits, oder vielmehr das erstere Mittel μ und der Quotient beider Mittel, d. h. die Größe w oder auch q. Die Quotienten $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\mu}$, $\frac{c}{\mu}$ hängen von w allein ab und werden von Gauss als Functionen dieser Größe studirt[7]). Sie sind nichts anderes als die Quadrate der drei Functionen ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2 für den Nullwert des ersten Arguments, so daß die zwischen a, b, c bestehende Beziehung unmittelbar jene berühmte Gleichung zwischen den vierten Potenzen dieser drei constanten Theta darstellt. Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels ergiebt sich nunmehr als identisch mit demjenigen, welcher die drei graden ϑ-Functionen der Argumente $0, 2w$ durch diejenigen der Argumente $0, w$ ausdrückt, also mit der Transformation zweiten Grades der ϑ-Functionen für den Nullwert des ersten Arguments.

Die Gesetze des Algorithmus reichen nun hin, die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser „neuen Transcendenten“, wie Gauss sie nennt, zu ergründen, vor allem ihre Darstellung durch jene merkwürdigen Reihenentwicklungen nach Potenzen von q, deren Exponenten die Quadratzahlen sind[8]). Diese Reihenentwicklungen liefern die Verwandlungsformeln der constanten Theta für die Veränderung von q in $-q$ oder w in $w+1$[9]), während die Functionalgleichungen für die Verwandlung von w in $\frac{1}{w}$[10]) sich ergeben aus der Bemerkung, daß bei Vertauschung der complementären Moduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ der Quotient $\frac{K'}{K}$ den reciproken Wert annimmt. Hierin liegt die lineare Transformation der Constanten ϑ; Gauss unterscheidet übrigens noch ausdrücklich die bekannten sechs Fälle[11]). An der betreffenden Stelle findet sich auch eine dunkle Andeutung über den Zusammenhang zwischen den neuen Transcendenten und den quadratischen Formen mit negativer Determinante, einen Zusammenhang, der erst so viel später durch die Untersuchungen von Hrn. Kronecker in ein helles Licht gesetzt worden ist.

Auch die bekannte, später von Jacobi behandelte Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher jene drei ϑ-Reihen als Functionen von q genügen, findet sich in diesen Aufzeichnungen[12]); sie ist hier aus den Differentialbeziehungen zwischen den Gliedern des Algorithmus hergeleitet.

Dies sind in kurzer Andeutung, da eine ausführlichere Darlegung sich hier nicht wohl geben läßt, die wesentlichsten Folgerungen, welche Gauss aus dem Algorithmus des arithmetisch-

geometrischen Mittels gezogen hat. Hauptprincip war dabei, um es noch einmal hervorzuheben, die Betrachtung der Elemente des Algorithmus in ihrer Abhängigkeit nicht von den Anfangsgliedern desselben, sondern von seinen Grenzwerten; so ergaben sich die drei graden ϑ-Functionen für den Nullwert des ersten Arguments, welche also nur Functionen eines Arguments w sind.

Dasselbe Princip, angewendet auf jenen zweiten, schon erwähnten Algorithmus, der nichts anderes als die Landen'sche Transformation ist, führte Gauss zur Entdeckung der allgemeinen elliptischen ϑ-Functionen, die von zwei Argumenten x, w abhängen.

Bei dieser Landen'schen Transformation wird die Modulnkette in der schon angegebenen Weise durch den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels bestimmt; die Reihe der Amplituden $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ u. s. w. ist so beschaffen, daß die Größen φ, $\frac{\varphi_1}{2}$, $\frac{\varphi_2}{4}$ u. s. f. sich einer bestimmten Grenze x nähern, welche gleich ist dem gegebenen elliptischen Integral, multiplicirt mit $\frac{\pi}{2K}$; diese Größe x und für die Modulnkette die Größe w sind die beiden Grenzwerte, welche bei dem Algorithmus der Transformation in Betracht kommen. Der Algorithmus selbst besteht darin, daß der sinus und cosinus der zweiten Amplitude und die gewöhnlich mit Δ bezeichnete Größe für die zweite Amplitude und den zweiten Modul durch die entsprechenden drei Größen für die erste Amplitude und den ersten Modul der Kette in einfacher Weise rational ausgedrückt werden. Betrachtet man nun nicht direct die Abhängigkeit der Elemente dieses Algorithmus von den Grenzwerten, sondern benutzt das schon beim Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels bewährte Princip, die Gleichungen homogen zu machen, indem man die drei Größen $\sin^2$, $\cos^2$ und Δ^2 für jedes Glied der Transformationskette durch die Quotienten von je vier neuen Größen α, β, γ, δ, nämlich $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ ausdrückt[13]), — so kommt man auf den von Gauss angegebenen Algorithmus, welcher übrigens in den des arithmetisch-geometrischen Mittels übergeht, sobald man die Größen δ, d. h. die Amplituden, gleich Null setzt, weil dann α, β, γ mit den früher durch a, b, c bezeichneten Größen identisch werden.

Der Gauss'sche Algorithmus liefert nun eine Darstellung der vier Größen α, β, γ, δ, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, auf den es nicht ankommt, in der Form unendlicher Producte, deren Factoren nur von den Amplituden und Moduln der Landen'-

schen Transformation abhängen[14]); betrachtet man diese Producte als abhängig nicht von den Anfangselementen φ, $\varkappa$ der Transformation, sondern von den Grenzwerten x und w, so sind dieselben nichts anderes als die Quadrate der vier ϑ-Functionen, und der neue Algorithmus stellt sich heraus als diejenige Transformation zweiten Grades, welche die ϑ-Functionen von $2x$, $2w$ ausdrückt durch diejenigen von x und w u. s. f. Jene Productdarstellungen der ϑ-Functionen mit Hülfe der Kette Landen'scher Transformationen stimmen vollkommen überein mit den von Jacobi in den Fundamenten und in der schon erwähnten Abhandlung über die numerische Berechnung gegebenen[15]), — ein treffendes Beispiel dafür, wie Gauss mit seinem ausgeprägten Sinn für das Praktische immer die Bequemlichkeit bei Zahlenrechnungen vorzugsweise in Betracht zog.

Mit Hülfe eines einfachen Kunstgriffs — nämlich gewisser Vertauschungen der α, β, γ, δ in den Gleichungen des Algorithmus und der Untersuchung der entsprechenden Aenderungen der Grenzwerte — können nunmehr die Functionalgleichungen der ϑ-Functionen für die Vermehrung des ersten Arguments um die Perioden erhalten werden[16]). Hieraus folgen in bekannter Weise die Fourier'schen Reihen oder bei Gauss die Entwicklungen nach Potenzen von e^{2ix} und von q[17]), deren Convergenz jedoch nicht untersucht wird. Es findet sich in diesen Aufzeichnungen sodann noch die partielle Differentialgleichung der vier ϑ-Functionen[18]) und jener Algorithmus, der die Functionen mit den Argumenten x, $2w$ durch diejenigen mit den Argumenten x, w ausdrückt[19]), mit anderen Worten, die sogenannte Gauss'sche Transformation zweiten Grades, wie sie in der „Determinatio attractionis“ mitgeteilt wird; dieser Algorithmus kann ebenfalls durch einen einfachen Kunstgriff aus dem Landen'schen erhalten werden.

Das Wesentliche dieser Resultate ist also Folgendes. Gauss wurde durch den Algorithmus der Landen'schen Transformation, mag er ihn nun selbständig gefunden oder nur von anderen übernommen haben, auf die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung geführt und fand in den Gesetzen des Algorithmus zugleich die Mittel, die Natur der hierbei auftretenden Functionen zu erforschen. Es zeigt sich, daß die obere Grenze z eines solchen Integrals, und ebenso $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$, dargestellt werden können als Quotienten, deren Zähler und gemeinsamer Nenner Functionen zweier Argumente sind, nämlich des Integrals selber x und der Größe w. Die Eigenschaften dieser vier für die Theorie fundamentalen Functionen werden festgestellt und auch analytische

Ausdrücke für sie gegeben, deren Beweis freilich, wenigstens in den uns vorliegenden Aufzeichnungen, nicht erbracht ist.

In diesen Notizen, die vermutlich aus den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts stammen, bedient sich also Gauss einer Methode, welche nichts gemein hat mit denen der späteren Bearbeiter dieser Theorie. Indessen ist dies auch für ihn nicht der einzige Zugang zu den elliptischen Functionen geblieben.

Es liegt uns vom Jahre 1799 eine Aufzeichnung vor: „varia imprimis de integrali $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}}$ “ [20]). Hierin giebt Gauss u. a. die Fourier'sche Entwicklung des sin am, sowie der Functionen ϑ_0, ϑ_1, als deren Quotient erstere dargestellt wird, ferner die unendlichen Producte für ϑ_0, ϑ_1 — alles in derselben Form wie bei Abel und Jacobi, wenn auch in anderer Bezeichnung. Die Formeln reihen sich ganz zusammenhangslos aneinander, und es würde schwerlich möglich sein, sich ein Urtheil zu bilden, wie Gauss zu diesen Resultaten gelangt sein mag, wenn er nicht selbst in Briefen an Bessel und Crelle ausdrücklich bemerkt hätte, daß Abel in seinen „Recherches“ (1827) genau denselben Weg eingeschlagen habe wie er selbst im Jahre 1798, zu welcher Zeit also wohl die letzterwähnten Untersuchungen größtentheils schon vollendet waren, da sich diese Bemerkung nicht wohl auf andere Aufzeichnungen über die allgemeine Theorie beziehen läßt. Wir würden also wohl anzunehmen haben, daß Gauss, nachdem er durch die vorhin dargelegten Betrachtungen zu dem Gedanken der Umkehrung geführt war, alsbald die außerordentliche Wichtigkeit des Euler'schen Theorems für die neuen Transcendenten erkannte und nun sich bemühte, dies in derselben Weise, wie später Abel, zum Aufbau der Theorie zu benutzen.

Der Umstand, daß Gauss an keiner Stelle das Additionstheorem der allgemeinen elliptischen Functionen anführt, kann gegenüber jener Mitteilung an Crelle und Bessel nicht ins Gewicht fallen. Es findet sich ja überhaupt in den nachgelassenen Papieren von vielen Untersuchungen, die Gauss unzweifelhaft durchgeführt und auch anderen mitgeteilt hat, nicht die geringste Aufzeichnung vor; ich erinnere in dieser Beziehung nur an seine Betrachtungen über die Integrale der Functionen einer complexen Veränderlichen, worüber er in den Briefen an Bessel so interessante Mitteilungen gemacht hat, sowie an die allgemeine Theorie der Lemniscatenteilung, welche in jener schon erwähnten Stelle der Disquisitiones berührt wird.

In jenen Untersuchungen vom Jahre 1798 haben wir also eine

Behandlung der Theorie, welche von der zuerst dargelegten vollständig verschieden ist. Dieselbe Methode hat Gauss übrigens, wie es scheint, auch in seinen Untersuchungen über die lemniscatischen Functionen[21]) benutzt, deren Anfang nach einer eigenhändigen Aufzeichnung von ihm in das Jahr 1797 fällt; und dieser Umstand ist wohl geeignet, der vorhin ausgesprochenen Vermutung als Stütze zu dienen.

Die Theorie der lemniscatischen Functionen beginnt Gauss, nachdem er die Functionen sin lemn und cos lemn definirt hat, mit der Aufstellung des Additionstheorems, aus dem die nächstliegenden Multiplicationsformeln hergeleitet werden. Es folgt[22]) die Bestimmung dieser Functionen als Quotienten von Potenzreihen, deren beständige Convergenz ausdrücklich betont wird; letztere sind genau die für den vorliegenden Fall specialisirten Al-Functionen des Herrn Weierstraß. Diese Functionen stellt Gauss[23]) auch als einfach-unendliche Producte dar in jener bekannten trigonometrischen Form, welche die Nullstellen in Evidenz setzt, wobei er ausdrücklich bemerkt: id quod rigorose demonstrare possumus. Wir brauchen deshalb nicht etwa anzunehmen, wie man wohl gethan hat[23a]), daß Gauss bereits im Besitze allgemeiner Sätze über die Darstellung eindeutiger Functionen als unendlicher Producte war; vielmehr ist mit jener Andeutung wohl der sogleich zu erwähnende Nachweis der Identität der für die ϑ-Functionen gefundenen trigonometrischen Reihen und Producte gemeint.

Ferner giebt Gauss hier die Fourier'schen Entwicklungen für die Zähler und Nenner von sin lemn und cos lemn sowie für diese Functionen selbst[24]); auch die Zerlegung der letzteren in Partialbrüche[25]). Endlich finden sich noch eine Anzahl von Formeln für complexe Multiplication[26]) (aus dem Additionstheorem hergeleitet), ferner Reihen- und Productentwicklungen für die Periode[27]) und mit Hülfe des arithmetisch-geometrischen Mittels erhaltene Formeln für die Fünfteilung[28]), die jedenfalls wohl mit der allgemeinen Teilungstheorie in Zusammenhang stehen, auf welche Gauss in den Disquisitiones anspielt.

Gauss hat sich indessen nicht damit begnügt, mit Hülfe der beiden Methoden, durch welche er die bisher erwähnten Resultate gewonnen hatte, in die Theorie der elliptischen Functionen einzudringen. Er hatte seine neuen Transcendenten, die ϑ-Functionen, einerseits als unendliche Reihen, andererseits als unendliche Producte dargestellt, und der so erlangte merkwürdige Zusammenhang zwischen diesen verschiedenartigen analytischen Ausdrücken veranlaßte ihn, einen directen Beweis für die betreffenden Gleichungen

zu suchen und darauf die Theorie seiner Functionen zu gründen; allerdings hat er diese letztere Absicht nicht vollständig durchgeführt.

Das Bedürfnis eines solchen directen Beweises für die Identität jener unendlichen Reihen und Producte hat Gauss schon bei den vorhin besprochenen Untersuchungen von 1798 empfunden[29]). Er ist dann auf diesen Punkt, der damals noch nicht vollständig klar gestellt war, in mehreren Aufzeichnungen aus den Jahren 1808, 1809 zurückgekommen[30]); am ausführlichsten ist die Frage behandelt in dem Fragment „Hundert Theoreme über die neuen Transcendenten"[31]), von dem wir nur wissen, daß es nicht vor 1818 niedergeschrieben ist, weil die Abhandlung „Determinatio attractionis" darin citirt wird. Gauss geht hier von einer endlichen Summe aus und verwandelt dieselbe in ein Product; der Uebergang zum Unendlichen liefert ihm dann sofort zwei Beziehungen zwischen unendlichen Reihen und Producten.

Es kann nicht geleugnet werden, daß dieses Gauss'sche Verfahren nicht diejenige Einfachheit besitzt, welche die Identitätsbeweise z. B. von Jacobi und Cauchy auszeichnet, bei welchen bekanntlich der umgekehrte und anscheinend natürlichere Weg von dem endlichen Product zur endlichen Summe verfolgt wird.

Daß Gauss wirklich die Absicht hatte, auf diesen Identitätsbeweis eine Theorie seiner Functionen zu gründen, läßt sich schon aus der ganzen Art der Darstellung in dem erwähnten Fragment schließen; so z. B. folgt unmittelbar auf den Beweis die Bemerkung[32]): „Die Functionen, welche durch diese beiden Theoreme in unendliche Producte entwickelt werden, sind von großer Wichtigkeit, und es wird gut sein, sie hier durch besondere Functionalzeichen zu bezeichnen." Diese Functionen sind genau unsere ϑ_2, ϑ_3; ferner führt er ϑ_0 ein, indem er in ϑ_3 w in $w+1$ verwandelt. Er betrachtet sodann die Product- und Reihenentwicklungen dieser drei Functionen für die Argumente 0, w einerseits, 0, $2w$ andererseits; zwischen diesen ergeben sich[33]) identische Relationen, welche die Transformation zweiten Grades der constanten Theta liefern, und damit ist zugleich der Zusammenhang mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel auf neuem Wege festgestellt. Das Fragment schließt[34]) mit der Herleitung des schon früher erwähnten Ausdrucks für q durch die Moduln jener Kette von Transformationen zweiten Grades.

Man kann die Methode, welche Gauss in den genannten Aufzeichnungen sowie in den außerdem noch vorhandenen (die erst 1827 wieder beginnen) benutzt, gradezu als die Methode der

Identitäten bezeichnen. Das Princip ist immer, aus identischen Gleichungen zwischen unendlichen Producten oder Summen Relationen zwischen ϑ-Functionen herzuleiten.

Auch bei dieser Methode, wie bei der vorhergehenden, berühren sich die Gauss'schen Arbeiten vielfach mit anderen, hier namentlich neueren Untersuchungen. In der That können z. B. die Beweise für die Additionstheoreme und Transformationsgleichungen der ϑ-Functionen immer auf solche Identitäten zurückgeführt werden; es kommt dann nur darauf an, allgemeine heuristische Principien herzustellen. Solche Principien sind insbesondere 1) dasjenige der Factorenzerlegung unendlicher Producte, namentlich mit Hülfe des Cotesischen Theorems, ein Princip, dessen Benutzung für die Herstellung der Transformationsgleichungen durch Abel und Jacobi bekannt geworden ist; 2) der Hermite'sche Satz, daß zwischen $r+1$ sog. ϑ-Functionen r^{ten} Grades immer eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen müsse; dieser kommt für die Herstellung von Identitäten zwischen ϑ-Reihen in Betracht.

Von diesen beiden Principien hat Gauss das erstere, wenn auch nicht mit Zuhülfenahme des Cotesischen Satzes, unzweifelhaft benutzt, wie aus mehreren Beweisandeutungen hervorgeht[35]). Was das zweite Princip anbetrifft, so könnte man vielleicht aus der Form des Beweises für eine gewisse ϑ-Relation vermuten, daß Gauss es, wenn auch nicht in voller Allgemeinheit, gekannt habe. Er bemerkt nämlich an einer Stelle[36]), daß das Product $\vartheta_3(x+y,w)\,\vartheta_3(x-y,w)$ sich linear und homogen durch $\vartheta_3(2x,2w)$ und $\vartheta_2(2x,2w)$ ausdrücken lasse mit Coefficienten, die nur von y abhängen, und bestimmt die letzteren durch Einsetzen specieller Werte, also ein Beweis genau von derselben Form, wie die jetzt üblichen. Indessen findet sich doch das Princip selbst bei Gauss nirgends ausgesprochen, und wir müssen daher die Möglichkeit offen lassen, daß er die hierher gehörigen Resultate mit Hülfe anderer Principien oder auch gleichsam intuitiv gefunden habe.

Außer auf die Additionstheoreme der ϑ-Functionen, als deren ausreichende Grundlage die erwähnte Gauss'sche Gleichung dienen kann, erstreckt sich diese Methode der Identitäten, wie schon bemerkt, namentlich auf die Transformationstheorie. Wir finden bei Gauss hier außer der Transformation erster[37]) und zweiter Ordnung[38]) auch noch diejenigen dritter[39]) fünfter[40]) und siebenter[41]) Ordnung der ϑ-Functionen. Anstatt der Modulargleichungen hat er immer nur die homogenen Gleichungen für die constanten ϑ, in denen q durch q^n ersetzt ist[42]), woraus sich ja die Modularglei-

chungen leicht ableiten lasssen. An einer Stelle [43]) giebt er auch allgemein für jeden unpaaren Transformationsgrad die sämtlichen Wurzeln der betreffenden Gleichungen an, wobei ja die zu $\sqrt[n]{q}$ gehörigen constanten ϑ auftreten, und fügt hinzu, daß man die Coefficienten der Gleichungen hiernach leicht vermittelst der Reihenentwicklung der Constanten ϑ nach Potenzen von q finden könne.

Neben den besprochenen Resultaten finden wir in diesen letzten Aufzeichnungen, die wie die übrigen auch meist zusammenhangslos sind, noch eine Anzahl wohl mehr gelegentlicher Einschaltungen; ich erwähne von diesen nur eine zweite Herleitung der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher die drei Functionen $\vartheta_h(0, w)$ genügen, aus den Productentwicklungen [44]), sowie eine Bemerkung [45]) über die Betrachtung der Größe w als Function von $\varkappa$, nämlich daß jedem Werte $\varkappa$ stets ein und nur ein Wert w innerhalb eines gewissen Teils der w-Ebene — des Fundamentalpolygons, wie wir heute sagen würden — entspricht.

Fassen wir nun noch einmal kurz die hauptsächlichsten Ergebnisse unserer Betrachtung zusammen. Wir haben gesehen, daß Gauss schon gegen Ende des vorigen Jahrhunderts durch den Algorithmus der Landen'schen Transformation dazu geführt war, die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung mit Hülfe der vier ϑ-Functionen darzustellen und die wesentlichen Eigenschaften dieser neuen Transcendenten zu entwickeln. Es konnte ihm nicht entgehen, welche fundamentale Bedeutung das Euler'sche Additionstheorem der Integrale für die Umkehrungsfunctionen besitzt, und dies veranlaßte ihn, in die Natur dieser Functionen weiter auf einem zweiten Wege einzudringen, auf welchem fast 30 Jahre später auch Abel dieses Gebiet betrat. Die merkwürdigen Relationen zwischen unendlichen Summen und Producten, welche durch die sich hierbei ergebenden Productdarstellungen der ϑ-Functionen geliefert werden, führten ihn nun endlich auf jene dritte Behandlungsweise der Theorie, welche ich in meiner Darstellung als Methode der Identitäten bezeichnet habe; von den Früchten dieser letzteren Untersuchungen sind insbesondere die Resultate aus der Transformationstheorie zu nennen.

So hat denn Gauss, und zwar zum Teil vermittelst einer Methode, die wegen ihrer Eigenartigkeit unser Interesse in hohem Maße beansprucht, schon Jahrzehnte vor Abel und Jacobi sich eine ausgedehnte Theorie der elliptischen Functionen geschaffen, welche einen höchst bedeutenden Teil der später von diesen Mathematikern gegebenen Resultate in sich faßte; in der That sind ihm von großen und umfassenden Gebieten dieser Theorie eigent-

lich nur die mehr algebraischen Untersuchungen und die mit dem Abel'schen Theorem zusammenhängenden fremd geblieben. Aber noch mehr, die Gauss'sche Theorie enthielt auch, wie wir gesehen haben, an verschiedenen Stellen die Anfänge weitgehender Untersuchungen, welche vollständig zu erledigen erst der Nachwelt vergönnt war.

Vergegenwärtigen wir uns die Tragweite der Gauss'schen Entdeckungen, welche von dem Urheber selbst durchaus nicht unterschätzt wurde, so erscheint es uns gewiß höchst seltsam, daß er all diese Schätze seinen Zeitgenossen vorzuenthalten vermochte, insbesondere nachdem Jacobi und Abel durch ihre Arbeiten ihm für einen Teil der Resultate die Priorität genommen hatten. Den Grund dafür würden wir nach einer mir von Herrn Weierstraß gütigst mitgeteilten Aeußerung des Herrn Wilhelm Weber in dem Umstande zu suchen haben, daß Gauss nicht eher an eine Bekanntmachung seiner Untersuchungen gehen wollte, als bis er die verschiedenen Methoden, welche ihm den Eingang in die Theorie vermittelt hatten, mit einander vollkommen in Einklang gesetzt haben würde. Dies entspricht in der That vollkommen Gauss' bekannten Grundsätzen in Bezug auf die Publication von Arbeiten; immerhin aber werden wir nicht zu weit gehen, wenn wir diese erste Entdeckung der Theorie der elliptischen Functionen und ihre Nichtveröffentlichung als eine der auffallendsten und merkwürdigsten Erscheinungen in der Geschichte der Mathematik bezeichnen.

Anmerkungen.

Die Zahlen bedeuten die Seiten in Gauss' Werken Bd. III.

1) 387. 2) 388 Mitte und Ende. $V, 2V', \ldots$ werden direct die Amplituden einer Kette von Landen'schen Transformationen. 3) Diese Ansicht hat mir Herr Weierstraß mitgeteilt. 4) 361—371, insbesondere No. 7 und 8. 5) 377, dritte Gleichung von oben. 6) Jacobi, Werke Bd. I, S. 201, 351. 7) In den Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel bezeichnet Gauss unser q immer mit y; es ist $p(y) = \vartheta_3(0, w)$, $q(y) = \vartheta_0(0, w)$, $r(y) = \vartheta_2(0, w)$. 8) 383. 9) 386 oben. 10) 385 unten, 386 oben. 11) 386. 12) 382. 13) 388 (vgl. Anmerkung 2)). 14) Dies beruht auf der dritten Gleichung S. 388 oben, nach welcher $\frac{\beta}{b}$ dargestellt werden kann durch die von Gauss mit $\frac{\varkappa}{K}$ bezeichnete Größe, multiplicirt mit einem unendlichen Product, in welchem nur die Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{a}{b}$ auftreten; dasselbe gilt dann von den übrigen Größen. Die Gleichungen sind: S. 394 oben ($\alpha = \varkappa P^2, \ldots, \delta = \varkappa S^2$, wobei $y = q = e^{w\pi i}$, $\eta = e^{2ix}$) und S. 395 oben ($Q = q\sqrt{\varDelta}\sqrt[4]{\varDelta'} \ldots$ u. s. f.). Ich bin übrigens bei der Darstellung der Gauss'schen Herleitung der ϑ-Functionen

nicht auf die Frage eingegangen, ob Gauss hier nur reale Argumente im Sinne gehabt hat, da sich dies nicht immer scharf entscheiden läßt. 15) Jacobi W. I, S. 204 oben, 357 Mitte; um die Uebereinstimmung zu erkennen, muß man nicht die $U^{(n)}$, sondern, wie schon in Anmerkung 2) angedeutet, die $V^{(n)}$ benutzen. 16) 396 oben. 17) 399. 18) 393. 19) 396. 20) 433 ff. Es ist $S\psi\tilde{\omega} = S\varphi = \sin \mathrm{am}\,(\varphi, \mu i)$; $T = \vartheta_1$, $W = \vartheta_0$ im Wesentlichen. 21) 404 ff. 22) 405 unten, 406 oben. 23) 415 f. 23a) Koenigsberger, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29. 24) 418 f. 25) 417. 26) 411. 27) 420, 424. 28) 421. 29) 434 unten. 30) 440 gegen Ende; x ist von hier ab immer unser q, und y unser e^{2ix}; diese Gleichung ist die Productdarstellung von ϑ_3. Ferner 446 unten, 447 oben, [Gleichungen 6, 7, 9]. 31) 461 f. 32) 465. 33) 466. 34) 467. 35) 466 oben, 470 [2] u. a. m. 36) 457, Gl. [69]. $x = q = e^{2\pi i w}$, $y = e^{2ix}$, $(x, y) = \vartheta_3(x, w)$, $\alpha = e^{2iy}$ zu setzen. 37) Hier merkwürdigerweise nur ein Specialfall, 441. 38) 471 f. 39) 471, 459 f. 40) 476 f. 41) 474. 42) 441 f., 456, 475 ff., 478 f. 43) 476. 44) 445. 45) 478. Eigentlich ist $\left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^2 = \frac{\vartheta_0^2(0, w)}{\vartheta_3^2(0, w)} = \varkappa'$. Vgl. a. die Abhandlung von Dedekind, Journal für Mathematik, Bd. 83.

Eine Anwendung der Idealtheorie auf die Substitutionsgruppen der automorphen Functionen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt von H. Weber in der Sitzung am 14. April 1894.

Im vorletzten Jahrgange dieser Nachrichten pg. 453 ff. habe ich ein auf der Betrachtung von Zahlenkörpern $n$ten Grades beruhendes gruppentheoretisches Princip besprochen, welches die Bildung von Substitutionsgruppen mit ganzen algebraischen Coefficienten bezweckte. Für den Fall $n = 1$ ist alsdann die gleiche Aufgabe unter weit größerer Allgemeinheit der Voraussetzungen im vorjährigen Bande der Nachrichten pg. 705 ff. endgültig gelöst. Die nachfolgenden Zeilen sollen das Problem behandeln, in wieweit der fragliche Gegenstand unter Einhaltung der gleichen Allgemeinheit der Voraussetzungen für beliebige algebraische Körper $n$ten Grades entwickelt werden kann. Es ist dies nur unter consequentem Gebrauche der Idealtheorie möglich. Die letztere betreffend benutze ich in der Folge zumeist die Bezeichnungsweisen der vierten Auflage von Dirichlet-Dedekind's Vorlesungen über Zahlentheorie, wobei die Aequivalenz zweier Ideale durch das Zeichen $\sim$ angedeutet sein soll.

Es sei Ω ein reeller (algebraischer) Zahlenkörper $n$ten Grades, dessen ganze Zahlen das System $\mathfrak{o}$ bilden. Aus $\mathfrak{o}$ seien die drei Ideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ derart gewählt, daß je zwei unter ihnen relative Primideale sind, während keines durch das Quadrat eines (absoluten) Primideals teilbar sein soll. A, B, C, D sollen vier die Ungleichung $A + C \gtrless B + D$ befriedigende positive Zahlen aus $\mathfrak{o}$ sein, welche überdies der Bedingung genügen, daß die drei Hauptideale $\mathfrak{o}AB$, $\mathfrak{o}AC$, $\mathfrak{o}AD$ in der Gestalt:

1) $$\mathfrak{o}AB = \mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{l}^2, \quad \mathfrak{o}AC = \mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{m}^2, \quad \mathfrak{o}AD = \mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{n}^2$$

darstellbar sind, unter $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ Ideale in $\mathfrak{o}$ verstanden. Damit die Gleichungen (1) überhaupt bestehen können, ist offenbar nötig, daß jede der drei Idealclassen von $\mathfrak{p}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ durch Duplication entstehen kann. Sobald die Anzahl der Idealclassen gerade ist, wird hierdurch eine Einschränkung für die Auswahl von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ vorgeschrieben, die wir ausdrücklich mit in die Voraussetzung aufnehmen müssen. Die Gleichungen (1) haben zur Folge:

$$2)\qquad \mathfrak{o}CD = \mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{u}^2, \quad \mathfrak{o}BD = \mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{v}^2, \quad \mathfrak{o}BC = \mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{w}^2,$$

wo $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ wieder Ideale in $\mathfrak{o}$ sind. — Die Gleichungen (1) schließen das Verschwinden einer der Zahlen A, B, C, D aus. Es sollen jetzt unter Einhaltung der Bedingung $A + C \gtrless B + D$ auch Quadrupel mit teilweise verschwindenden Zahlen hinzugefügt werden, mit der Bestimmung, daß unter den Gleichungen (1), (2) alle die in Kraft bleiben, welche nicht durch Verschwinden der linken Seite widerspruchsvoll werden, und daß übrigens die nicht verschwindenden Zahlen des Quadrupels positiv sind.

Dem einzelnen der hiermit definirten Quadrupel weisen wir die Substitution:

$$3)\qquad \zeta' = \frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B})\,\zeta + (\sqrt{C} + \sqrt{D})}{(-\sqrt{C} + \sqrt{D})\,\zeta + (\sqrt{A} - \sqrt{B})}$$

der complexen Veränderlichen ζ zu und bezeichnen diese Substitutionen symbolisch durch $V, V', \ldots$ Um die Bedingungen aufzusuchen, unter denen VV' wieder eine Substitution dieser Art ist, setzen wir vorderhand $VV' = V''$ und definiren dementsprechend vier Zahlen A'', B'', C'', D'' durch die Gleichungen:

$$4)\qquad \begin{aligned} \sqrt{A''} &= \sqrt{AA'} + \sqrt{BB'} - \sqrt{CC'} + \sqrt{DD'}, \\ \sqrt{B''} &= \sqrt{AB'} + \sqrt{BA'} + \sqrt{CD'} - \sqrt{DC'}, \\ \sqrt{C''} &= \sqrt{AC'} + \sqrt{BD'} + \sqrt{CA'} - \sqrt{DB'}, \\ \sqrt{D''} &= \sqrt{AD'} + \sqrt{BC'} - \sqrt{CB'} + \sqrt{DA'}. \end{aligned}$$

Jedenfalls sind A'', B'', C'', D'' nicht-negative ganze algebraische Zahlen, und es soll zuvörderst untersucht werden, wann dieselben in $\mathfrak{o}$ enthalten sind. Indem man die Gleichungen (4) einzeln quadrirt, oder auch, indem man rechter Hand jeweils ein nicht-verschwindendes unter den vier Gliedern als Factor heraushebt, ergiebt sich, daß $A'', B'' \ldots$ sicher in $\mathfrak{o}$ enthalten sind, wenn die zwölf viergliedrigen Verbindungen:

$$5)\qquad \begin{matrix} ABA'B', & ACA'C', \ldots, & CDC'D' \\ ABC'D', & ACB'D', \ldots, & CDA'B' \end{matrix}$$

reine Quadrate in $\mathfrak{o}$ sind (die Null mit eingeschlossen). Von diesen Bedingungen sind stets mehrere Folgen der übrigen, und wir merken überdies noch als Folge an, daß auch $ABCD$ für jedes unserer Quadrupel ein reines Quadrat in $\mathfrak{o}$ sein muß.

Zur Discussion dieses Ansatzes nehme man an, daß sowohl A und B, als auch A' und B' von Null verschieden sind; man kann dies kürzer, aber nicht völlig streng dahin ausdrücken, daß $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ von Null verschieden seien. Aus (1) folgt:

$$\mathfrak{o} A B A' B' = (\mathfrak{p r l l}')^2,$$

und da links das Quadrat eines Hauptideals stehen soll, so ist auch $\mathfrak{p r l l}'$ Hauptideal, und aus $\mathfrak{p r l l}' \sim \mathfrak{p r l}^2$ folgt $\mathfrak{l} \sim \mathfrak{l}'$. Auf diese Weise findet man überhaupt die Relationen:

$$6)\qquad \begin{array}{l} \mathfrak{l} \sim \mathfrak{u} \sim \mathfrak{l}' \sim \mathfrak{u}' \sim \mathfrak{l}'' \sim \mathfrak{u}'' \sim \ldots., \\ \mathfrak{m} \sim \mathfrak{v} \sim \mathfrak{m}' \sim \mathfrak{v}' \sim \mathfrak{m}'' \sim \mathfrak{v}'' \sim \ldots., \\ \mathfrak{n} \sim \mathfrak{w} \sim \mathfrak{n}' \sim \mathfrak{w}' \sim \mathfrak{n}'' \sim \mathfrak{w}'' \sim \ldots. \end{array}$$

für unsere Quadrupel als Ergebnisse des Ansatzes (5), wobei aber aus den Aequivalenzen (6) alle diejenigen Ideale ausfallen müssen, welche infolge Verschwindens der linken Seite von (1) oder (2) nicht definirt sind. Es ist natürlich nötig, die Möglichkeit des Verschwindens einzelner Zahlen A, B, C, D im einzelnen durchzugehen. Man wird dabei $A'B'C'D' > 0$ annehmen und wird dann in allen für A, B, C, D möglichen Fällen auf die Bedingungen (6), im angegebenen Sinne verstanden, zurückgeführt. Sind $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ von Null verschieden, so ist auch noch:

$$7)\qquad (\mathfrak{p q r}) \cdot (\mathfrak{l m n}) \sim \mathfrak{o},$$

und es besteht diese oder eine entsprechende Relation[1]) stets, außer wenn zwei unter den Zahlen des Quadrupels verschwinden.

Es ist hierbei zu bemerken, daß zufolge (1) die Bedingungen (6) und (7) stets erfüllt sind, falls die Anzahl h der Idealclassen eine ungerade Zahl ist; dagegen bedeuten bei geradem h die Forderungen (6) und (7) wesentliche Einschränkungen für die Auswahl der Quadrupel A, B, C, D. Ist nämlich μ die Anzahl der sich selbst inversen Idealclassen, so hat man für ungerades h stets $\mu = 1$, für gerades h gilt indessen $2 \leq \mu \leq h$.

Durch die Relationen (1) sind die drei Idealclassen der Horizontalreihen (6) einzeln μ-deutig bestimmt, und zwischen diesen Classen besteht, sofern nicht mehr als eine Zahl des Quadrupels

1) In welcher $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ teilweise oder ganz durch $\mathfrak{u}$ bez. $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ ersetzt erscheinen.

verschwinden, die Relation (7), vermöge deren eine der Classen eindeutig durch die beiden anderen bestimmt ist.. Sollten aber wenigstens zwei Zahlen des Quadrupels verschwinden, so kommt höchstens ein Ideal $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \ldots$ in Betracht. Bei den verschiedenen hier möglichen Combinationen haben wir demgemäß die gesamten Quadrupel mit rein quadratischem $ABCD$ auf μ^2 unterschiedene Classen zu verteilen, wobei immer nur die Quadrupel der gleichen Classe mit einander die Relationen (6) und (7) eingehen. Doch erscheinen dabei Quadrupel mit zwei oder drei verschwindenden Zahlen mehreren Classen (nämlich nach Maßgabe der nicht-ausfallenden Ideale) zuerteilt. —

Aus der einzelnen der μ^2 Classen wähle man nunmehr nach Belieben ein Quadrupel mit nicht-verschwindendem $ABCD$, das abgekürzt Q genannt werden soll. Irgend ein zweites Quadrupel der gleichen Classe liefert in $\mathfrak{o}\, ABA'B'$, $\mathfrak{o}\, ACA'C'$, . . zwölf Quadrate von Hauptidealen, und also sind die swölf Zahlen (5) innerhalb Ω mit zwölf reinen Quadraten associiert. Bilden die $(\nu-1)$ (positiv gewählten) Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}$ ein Fundamentalsystem, so hat man dieserhalb die Gleichungen:

$$
8)\qquad
\begin{aligned}
ABA'B' &= e_1^{s_1} e_2^{s_2} \ldots e_{\nu-1}^{s_{\nu-1}} \cdot a^2, \\
ACA'C' &= e_1^{t_1} e_2^{t_2} \ldots e_{\nu-1}^{t_{\nu-1}} \cdot b^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

wo $s_1, t_1 \ldots$ ganze rationale Zahlen und $a, b, \ldots$ Zahlen in $\mathfrak{o}$ (die Null nicht ausgenommen) sind. Es sind nun die Exponenten $s_1, t_1 \ldots$ modulo 2 zu betrachten, und wir nennen das hier entspringende System der kleinsten positiven Reste die Charakteristik des Quadrupels $A'B'C'D'$ in Bezug auf Q. Da $ABCD$ und $A'B'C'D'$ Quadratzahlen in $\mathfrak{o}$ sind, so ist mit den Resten der $(2\nu-2)$ Zahlen s, t bereits die ganze Charakteristik festgelegt. Da die s, t ihrerseits willkürlich wählbar bleiben, so giebt es insgesamt $2^{2\nu-2}$ unterschiedene Charakteristiken. Man nehme daraufhin erneut eine Einteilung in $2^{2\nu-2}$ Unterclassen vor, indem man immer diejenigen Quadrupel mit der gleichen Charakteristik in Bezug auf Q in eine Unterclasse vereint. Quadrupel mit teilweise verschwindenden Zahlen geben hier zu besonderer Betrachtung Anlaß; doch findet man leicht, daß nur Quadrupel mit mehr als einer verschwindenden Zahl mehreren Unterclassen zuzuerteilen sind (und zwar nach Maßgabe der nicht-verschwindenden Zahlen (5)). Uebrigens lehrt nun eine einfache Ueberlegung, daß die Quadrupel der gleichen Unterclasse in Bezug auf einander stets die Charakteristik $(0, 0, \ldots, 0)$ haben.

Auf diese Weise hat sich ergeben: Die in $\mathfrak{o}$ enthaltenen, die Forderungen (1), (2) erfüllenden Quadrupel positiver (bez. verschwindender) Zahlen, welche rein quadratisches $ABCD$ liefern und der Bedingung $A+C \gtreqless B+D$ genügen, sind in $\mu^2 \cdot 2^{2\nu-2}$ Classen zu verteilen, wo μ die Anzahl der sich selbst inversen Idealclassen bedeutet und ν die Anzahl der mit Ω conjugirten reellen und der Paare imaginärer Körper ist. In allen Classen kommen unendlich viele Quadrupel vor, und an mehr als einer Classe können sich nur Quadrupel mit wenigstens zwei verschwindenden Zahlen beteiligen. Die Combination zweier Quadrupel derselben Classe nach Vorschrift von (4) liefert in A'', B'', C'', D'' wieder Zahlen in $\mathfrak{o}$. —

Es ergiebt sich nun weiter, daß die Zahlen A'', B'', C'', D'' sämtlich positiv oder doch nicht negativ sind, und daß $A''+C'' \gtreqless B''+D''$ zutrifft; letzteres folgt aus der Betrachtung der Determinante von (3). Ueberhaupt aber können wir nachweisen, daß A'', B'', C'', D'' wieder in dieselbe unter den $\mu^2 \cdot 2^{2\nu-2}$ Classen gehört, in welcher auch $A, \ldots, D$ und $A', \ldots, D'$ enthalten sind. Indem wir nämlich für A, B, C, D und $A'', \ldots, D''$ z. B. die erste unter den biquadratischen Verbindungen (5) betrachten (für die übrigen gilt eine analoge Betrachtung), stellen wir von (4) aus durch directes Ausmultiplicieren fest, daß $ABA''B''$ ein reines Quadrat in $\mathfrak{o}$ ist. Ist nun $ABA''B''$ von Null verschieden, so ist

$$\mathfrak{o}ABA''B'' = \mathfrak{o}AB \cdot \mathfrak{o}A''B'' = \mathfrak{a}^2,$$

wo $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. Mit Rücksicht auf (1) folgt hieraus ohne weiteres $\mathfrak{o}A''B'' = \mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{l}''^2$, und da $\mathfrak{a}$ Hauptideal ist, so ergiebt sich aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{l}\mathfrak{l}''$ die Aequivalenz $\mathfrak{l} \sim \mathfrak{l}''$. Ebenso leicht kann man beweisen, daß $A, \ldots, D$ und A'', B'', C'', D'' in Bezug auf einander die Charakteristik $(0, \ldots, 0)$ haben, und daß $A''B''C''D''$ in $\mathfrak{o}$ reines Quadrat ist.

Die bisherige Entwicklung hat zu dem Resultat geführt, daß die gesamten Quadrupel der einzelnen Classe vermöge (3) eine Gruppe von ζ-Substitutionen constituieren; aus unserem Ansatz entspringen somit im ganzen $\mu^2 \cdot 2^{2\nu-2}$ derartige Gruppen, μ und ν in der oben angegeben Bedeutung gebraucht.

Es sei jetzt eine einzelne der $\mu^2 \cdot 2^{2\nu-2}$ Gruppen vorgelegt. Die Substitutionen derselben haben zufolge der Bedingung $A+C \gtreqless$

$B+D$ durchweg von Null verschiedene Determinanten. Nehmen wir nun die **unimodularen** Substitutionen für sich:

$$9)\qquad A-B+C-D=1,$$

so wird sich später zeigen, daß diese eine in allen Fällen existierende Untergruppe von unendlicher Ordnung bilden. Es soll nun zunächst das genauere Bildungsgesetz dieser unimodularen Gruppe untersucht werden.

Die vier Hauptideale $\mathfrak{o}A, \ldots, \mathfrak{o}D$ sind in der Gestalt:

$$\mathfrak{o}A = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}_1\cdot\mathfrak{a}^2,\qquad \mathfrak{o}B = \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_2\cdot\mathfrak{b}^2,$$
$$\mathfrak{o}C = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3\mathfrak{r}_3\mathfrak{s}_3\cdot\mathfrak{c}^2,\qquad \mathfrak{o}D = \mathfrak{p}_4\mathfrak{q}_4\mathfrak{r}_4\mathfrak{s}_4\cdot\mathfrak{d}^2$$

anzusetzen. Dabei sollen $\mathfrak{a}^2, \ldots, \mathfrak{d}^2$ die größten in $\mathfrak{o}A, \ldots, \mathfrak{o}D$ enthaltenen Quadrate sein, so daß keines der vier Producte $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i\mathfrak{r}_i\mathfrak{s}_i$ durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist. Es sei ferner $\mathfrak{p}_i$ der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{t}_i$ und $\mathfrak{p}$, und entsprechend seien $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{r}_i$ definiert, so daß $\mathfrak{s}_i$ prim gegen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ ist. Da $\mathfrak{p}\mathfrak{r}$ durch kein Quadrat teilbar ist, so folgt durch Multiplication von $\mathfrak{o}A$ und $\mathfrak{o}B$ mit Benutzung von (1):

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdot\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{p}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}^2.$$

Es muß demzufolge jeder in $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_1)$ enthaltene Faktor in $\mathfrak{p}_2$ aufgehen, und somit überhaupt $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_1)$ in $\mathfrak{p}_2$. Andrerseits muß das Ideal $\mathfrak{p}_2$ in $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_1)$ aufgehen, da es linker Hand nur in erster Potenz enthalten ist; man hat also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ und findet in entsprechender Weise $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$. An die Gleichung:

$$\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdot\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{e}^2$$

knüpft sich eine entsprechende Discussion, die zu dem Resultate $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$ führt. Man multipliciere nun auch $\mathfrak{o}A$ mit $\mathfrak{o}C$ und $\mathfrak{o}A$ mit $\mathfrak{o}D$ und verwerte dabei die zweite und dritte Gleichung (1). Es ergiebt sich so insbesondere $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{s}_4$, woran sich noch eine kleine Ueberlegung knüpft. Zufolge (9) enthält nämlich der größte gemeinsame Teiler der vier Hauptideale $\mathfrak{o}A, \ldots, \mathfrak{o}D$ die Einheit 1, derselbe ist also mit $\mathfrak{o}$ identisch. Da andrerseits $\mathfrak{s}_1$ in allen vier Hauptidealen aufgeht, so ist $\mathfrak{o} > \mathfrak{s}_1$ und also $\mathfrak{o} = \mathfrak{s}_1$. Man hat somit das Resultat: **Die vier Hauptideale $\mathfrak{o}A, \ldots, \mathfrak{o}D$ haben notwendig die Gestalt:**

$$10)\qquad \mathfrak{o}A = \mathfrak{p}_1\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{a}^2,\qquad \mathfrak{o}B = \mathfrak{p}_2\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{b}^2,$$
$$\mathfrak{o}C = \mathfrak{p}_1\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{q}_2\cdot\mathfrak{c}^2,\qquad \mathfrak{o}D = \mathfrak{p}_2\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{q}_2\cdot\mathfrak{d}^2.$$

Hierbei bedeuten:

11) $$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2,$$

irgend welche Zerlegungen der drei gegebenen Ideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, so daß man $2^{(\mathfrak{p})+(\mathfrak{q})+(\mathfrak{r})}$ verschiedene Substitutionstypen hat, wenn $(\mathfrak{p})$ die Anzahl der verschiedenen in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primideale u. s. w. ist. Die Fälle von Quadrupeln mit teilweise verschwindenden Zahlen sind unter den Ansatz (10) mit einbegriffen, wenn man hier an Stelle der betreffenden Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$ die Null eintragen will. Freilich muß man die eben vorausgeschickte Ueberlegung in diesen besondern Fällen ein wenig modificieren, und zwar gerade in der Art, wie dies in der zweiten der eingangs genannten Noten für $n = 1$ ausführlich entwickelt wurde. Ueberhaupt ist das Resultat (10) die directe Verallgemeinerung des für $n = 1$ aufgestellten Bildungsgesetzes der Substitutionscoefficienten (siehe l. c. pag. 709).

Man kann hier noch die Frage aufwerfen, nach welchem Gesetze sich die unterschiedenen Substitutionstypen mit einander combinieren. Ist aber $VV' = V''$, so ist $AA'A''$ in $\mathfrak{o}$ ein reines Quadrat, und man kann eine große Reihe solcher dreigliedriger Verbindungen bilden, die rein quadratisch sind, und von denen immer hinreichend viele von 0 verschieden sind. Gilt letzteres bereits von $AA'A''$, so ist $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_1'' \cdot \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_1' \mathfrak{q}_1'' \cdot \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_1' \mathfrak{r}_1''$ das Quadrat eines Ideals, und also gilt zufolge der über $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ gemachten Voraussetzungen dasselbe von den Producten $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_1'', \ldots$ einzeln. Nun enthält $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1'$ als größten quadratischen Teiler $(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_1')^2$, und nach Entfernung dieses Teilers muß somit $\mathfrak{p}_1''$ übrig bleiben. Man bemerke weiter, daß $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' = (\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_1')(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')$ ist, und verfahre im übrigen bei den Idealen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ entsprechend. Man gewinnt alsdann das Resultat: Bei Combination zweier Substitutionen V, V' zu $V'' = VV'$ ergiebt sich der Typus der neuen Substitution V'' aus:

12) $$\mathfrak{p}_1'' = \frac{\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1'}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_1'}, \quad \mathfrak{q}_1'' = \frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_1'}{\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_1'}, \quad \mathfrak{r}_1'' = \frac{\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_1'}{\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_1'}.$$

Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{r}_1$ zugleich mit $\mathfrak{o}$ identisch, so sagen wir, V habe den Haupttypus. Zeigt eine der beiden Substitutionen V, V' den Haupttypus, so hat VV' den Typus der anderen; haben V und V' den gleichen Typus, so zeigt VV' den Haupttypus. Die Substitutionen des Haupttypus bilden in der Gesamtgruppe eine ausgezeichnete Untergruppe des Index $2^{(\mathfrak{p})+(\mathfrak{q})+(\mathfrak{r})}$.

Bei der Frage, welche von den definierten Gruppen eigentlich discontinuierlich sind, kann man im wesentlichen dieselbe Ueberlegung anstellen, wie bei der entsprechenden Frage in der ersten der anfangs genannten Noten (siehe auch Bd. 42 der Mathem. Annalen pag. 564 ff.). Man scheide aus einer einzelnen vorgelegten Gruppe zuvörderst die in ihr enthaltenen Substitutionen der Bauart:

$$13)\qquad \zeta' = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}\,\zeta \text{ und } \zeta' = \frac{\sqrt{A}\,\zeta+\sqrt{D}}{\sqrt{D}\,\zeta+\sqrt{A}}$$

aus; die Substitutionen der ersten Art bilden die Untergruppe G, diejenigen der anderen Art G'[1]).

Innerhalb G bilden die Substitutionen des Haupttypus eine neue Untergruppe G_0, die in Bezug auf G einen endlichen Index $\leqq 2^{(\mathfrak{p})+(\mathfrak{q})+(\mathfrak{r})}$ darbietet. Bei den Substitutionen von G_0 ist A mit einem Quadrate associiert. Die dabei auftretende multiplicative Einheit wird man im Fundamentalsystem $e_1, \ldots, e_{\nu-1}$ derart darstellen können, daß nur die Exponenten 0 und 1 vorkommen. Es ist alsdann mit Rücksicht auf die früheren Entwicklungen leicht einzusehen, dass die Substitutionen mit der Exponentenreihe $0, 0, \ldots, 0$ aufs neue eine Untergruppe g bilden, welche in Bezug auf G_0 wieder einen endlichen Index $\leqq 2^{\nu-1}$ besitzt.

In den Substitutionen von g sind nun die Zahlen A reine Quadrate in $\mathfrak{o}$, während zufolge (1) von B das Gegenteil gilt. Man greife nun irgend eine unter den Zahlen B auf und erweitere den Körper Ω durch Adjunction von $\sqrt{B}$ auf einen Körper Ω' vom Grade $2n$. Dann sind wie nebenher bemerkt sei, in Ω' nicht nur alle weiteren Wurzeln $\sqrt{B}$ von g, sondern überhaupt alle Zahlen $\sqrt{AB}$ der Gesamtgruppe enthalten.

Für die Gruppe G' gilt eine analoge Ueberlegung, die zur Einführung eines zweiten Zahlenkörpers Ω'' vom $2n$ten Grade sowie einer zweiten Gruppe g' hinführt. Dabei sind beide Körper

---

1) In Ergänzung obiger Entwicklungen sei hierbei bemerkt, daß zwar G (oder auch G'), allein genommen, stets in mehreren unter den $\mu^2\, 2^{2\nu-2}$ Gruppen enthalten ist; aber nur in einer Gruppe kommen G und G' zugleich vor. In der That ist durch ein einzelnes Substitutionenpaar (13) unter den $\mu^2\, 2^{2\nu-2}$ oben unterschiedenen Classen eine einzelne eindeutig festgelegt. Auf Grund der Gleichungen (1) nämlich wird durch die erste Substitution (13) die erste Idealclasse (6) fixiert, durch die zweite Substitution (13) aber die dritte Classe (6), während sich die zweite Classe durch (7) eindeutig bestimmt. Ueberdies liefern die Substitutionen (13) je eine der Relationen (8), so daß die Charakteristik der Quadrupel unserer Gruppe hiermit gleichfalls eindeutig bestimmt ist.

Ω', Ω'' bereits durch eine einzige Substitution der Gruppe fest bestimmt, wenn man dieselbe nur so wählt, daß $ABCD > 0$ ist.

Soll nun die unimodulare Gesamtgruppe eigentlich discontinuierlich sein, so müssen G und G' cyclisch sein, d. h. alle Substitutionen dieser Gruppe müssen sich jeweils aus einer unter ihnen erzeugen lassen. Dies ist aber stets und nur dann der Fall, wenn auch g und g' cyclisch sind, und hierfür sind in Bd. 42 der Annalen l. c. vermittelst der Einheitentheorie die Bedingungen bereits vollgültig entwickelt. Als notwendige Bedingung für die eigentliche Discontinuität der unimodularen Gruppe ist danach zu formulieren: Alle mit Ω conjugierten Körper müssen reell sein; aber sowohl bei Ω' wie Ω'' dürfen unter den $2n$ conjugierten Körpern nur zwei reell sein, während die $(2n-2)$ übrigen paarweise conjugiert imaginär sein müssen. Aus den Existenzsätzen der Einheiten folgt zugleich in allen Fällen die wirkliche Existenz der Gruppen G, G' und damit überhaupt der unimodularen Gesamtgruppen im oben behaupteten Umfange.

Es ist nun endlich leicht zu sehen, daß die aufgestellte Bedingung auch hinreichend für die eigentliche Discontinuität der unimodularen Gruppe ist. Bezeichnen wir nämlich mit $A_0 = A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ die mit A conjugierten Zahlen und entsprechend die mit B, C, D conjugierten, so ist, wenn wir zuvörderst eine Substitution mit $ABCD > 0$ auswählen, zwar sowohl AB wie AD positiv, hingegen sind alle übrigen A_iB_i und A_iD_i negativ. Da nun $A_iB_iC_iD_i$ das Quadrat einer reellen Zahl ist, so folgt für $i > 0$ weiter $A_iC_i > 0$. Somit sind für $i > 0$ alle vier Zahlen $A_i, -B_i, C_i, -D_i$ von einerlei Zeichen, und zwar vom positiven, da ihre Summe gleich 1 ist. Aus letzterem Umstande folgt aber zugleich, daß die absoluten Beträge der A_i, B_i, C_i, D_i für $i > 0$ < 1 sind. Die Quadrupel mit teilweise verschwindenden Zahlen verlangen auch hier wieder eine besondere Betrachtung. Man geht dabei zweckmäßig auf die reinen Quadrate (5) zurück, indem man unter A', B', C', D' ein Quadrupel mit $A'B'C'D' > 0$ versteht. Dabei ergiebt sich, daß $A_i, -B_i, C_i, -D_i$ nicht negativ sind, und daß die absoluten Beträge dieser Zahlen ≤ 1 sind. Suchen wir nun alle Substitutionen der Gruppe auf, deren Coefficienten, absolut genommen, eine beliebig zu wählende endliche Grenze nicht übertreffen, so sind auch noch die absoluten Beträge von A, B, C, D beschränkt, und wir erhalten nach einem bekannten Satze der Zahlentheorie nur eine endliche Anzahl solcher Substitutionen.

Das Vorkommen infinitesimaler Substitutionen ist demnach ausgeschlossen, und die Gruppe ist eigentlich discontinuierlich.

Endlich ist noch die Möglichkeit der Hereinnahme von Substitutionen einer von 1 verschiedenen Determinante zu erwägen. In früher betrachteten Specialfällen waren es die Determinanten 2 und 4, welche herangezogen wurden. Es ist jedenfalls keine wesentliche Beschränkung, wenn wir nur positive Determinanten zulassen, und vor allem sollen die Determinanten rationale ganze Zahlen sein, während übrigens die sämtlichen Vorschriften über die Bauart der Substitutionen bestehen bleiben. Es sei angenommen, daß ein gemeinsamer realer Teiler aus den Coefficienten der einzelnen Substitution immer fortgehoben wird. Kommen auch dann noch unbegrenzt viele verschiedene Determinanten vor, so ist die Gruppe im allgemeinen[1]) nicht eigentlich discontinuierlich. Sind indessen, wie in den citierten Fällen der Determinanten 2 und 4, die Substitutionen durch zusätzliche Bedingungen derart beschränkt, daß bei Combination zweier Substitutionen nach eventueller Forthebung eines Factors immer nur wieder Determinanten aus einer beschränkten Reihe vorliegen, so ist die erweiterte Gruppe stets dann eigentlich discontinuierlich, wenn die unimodulare es ist. Der Beweis gestaltet sich Schritt für Schritt genau so, wie oben bei der unimodularen Gruppe.

Um die voraufgehenden allgemeinen Entwicklungen an einem einfachen Beispiele zu illustrieren, identificieren wir Ω mit dem quadratischen Körper der Basis $[1, \sqrt{35}]$ und der Grundzahl $D = 140$. Es ist hier die Anzahl der Idealclassen $h = 2$; in der That hat man zwei Classen quadratischer Formen der Determinante 35, sofern man auch uneigentlich aequivalente Formen in eine Classe vereint. Als Repräsentanten dieser beiden Classen könnnen die Formen dienen:

14) $$x^2 - 35y^2, \qquad 5x^2 - 7y^2.$$

Ist p eine rationale Primzahl, so ist $\mathfrak{o}p$ Primideal zweiten Grades oder Product zweier Primideale ersten Grades $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, je nachdem 35 quadratischer Nichtrest oder Rest von p ist. Im letzteren Falle gehören $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zur Hauptclasse oder zur zweiten Idealclasse, je nachdem p bez. $-p$ in der ersten Form (14) dar-

1) Dieser Satz kann in der That nur bedingt ausgesprochen werden, da er sich in allen bislang betrachteten Specialfällen bewährt hat, ohne daß seine unumschränkte Gültigkeit wahrscheinlich wäre.

stellbar ist oder nicht. Die Zahlen 13, 17, 23 sind die niedersten Primzahlen, deren zugehörige Hauptideale jeweils in zwei Primideale der zweiten Classe zerfallen. Wir setzen:

15) $$\mathfrak{o}\cdot 23 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}', \quad \mathfrak{o}\cdot 17 = \mathfrak{q}\mathfrak{q}', \quad \mathfrak{o}\cdot 13 = \mathfrak{r}\mathfrak{r}'.$$

Die rechter Hand auftretenden Factoren kann man am einfachsten dadurch definieren, daß man die Bedeutung der Hauptideale $\mathfrak{p}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ festlegt; es geschieht dies durch:

16) $$\mathfrak{p}\mathfrak{r} = \mathfrak{o}\cdot(4+3\sqrt{35}),\ \mathfrak{r}\mathfrak{q} = \mathfrak{o}\cdot(16+\sqrt{35}),\ \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\cdot(13+4\sqrt{35}),$$

so daß man auch an Stelle von $\mathfrak{p}$ den gemeinsamen idealen Teiler von 23 und $(4+3\sqrt{35})$ ect. setzen könnte.

Es ist im vorliegenden Specialfalle $\nu = 2$, und die eine in Betracht kommende Fundamentaleinheit ist $e = 6+\sqrt{35}$. Da überdies $\mu = 2$ ist, so entspringen im ganzen 16 Gruppen, unter denen weiterhin eine einzelne näher charakterisiert werden soll. Unter den $\mu^2 = 4$ Möglichkeiten der ersten Einteilung fixieren wir in Uebereinstimmung mit (7) eine einzelne durch die Festsetzung $\mathfrak{l} = \mathfrak{n} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$; daraufhin ergiebt sich:

$$\mathfrak{o}AB = \mathfrak{o}(4+3\sqrt{35}),\ \mathfrak{o}AC = \mathfrak{o}(472+55\sqrt{35}),\ \mathfrak{o}AD = \mathfrak{o}(13+4\sqrt{35}).$$

Unter den weiteren $2^{2\nu-2} = 4$ Möglichkeiten wählen wir nun dadurch eine einzelne, daß wir AB, AC und AD direct mit den drei rechts stehenden Klammergrößen identificieren, ohne noch multiplicative Potenzen von e hineinzunehmen. Das Zahlquadrupel:

$$A = 1,\quad B = 4+3\sqrt{35},\quad C = 472+55\sqrt{35},\quad D = 13+4\sqrt{35}$$

genügt alsdann der Bedingung $A + C > B + D$ und legt die fragliche Gruppe eindeutig fest, ohne übrigens schon eine Substitution der unimodularen Untergruppe zu liefern.

Die beiden biquadratischen Körper Ω' und Ω'' gewinnen wir dadurch, daß wir zu Ω einmal $\sqrt{4+3\sqrt{35}}$ und sodann $\sqrt{13+4\sqrt{35}}$ adjungieren. Da sowohl $4-3\sqrt{35}$ wie $13-4\sqrt{35}$ negativ ist, so sind bei Ω' wie bei Ω'' unter den vier conjugierten Körpern jeweils nur zwei reell. Die hier vorliegende unimodulare Gruppe ist somit eigentlich discontinuierlich; inzwischen dürfte die Feststellung ihres Discontinuitätsbereiches umständliche Rechnungen nötig machen.

Braunschweig, am 23. März 1894.

Der Satz vom thermodynamischen Potential beim Gleichgewichte eines heterogenen Systems mit Anwendung auf die Theorie von van der Waals und das Gesetz des Siedepunctes.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. April 1894.

I. Verborgene Zustandsgrössen und Potentialgesetz.

Wir denken uns einen Cylinder, der, durch einen beweglichen Kolben geschlossen, in seinem Hohlraum flüssiges Wasser und Wasserdampf enthält. Nehmen wir an, das Innere des Cylinders sei der Beobachtung nicht zugänglich, so sind die einzigen Größen, welche den Gegenstand der Messung bilden können, Volumen, Druck und Temperatur. Bezeichnen wir die Energie des in dem Cylinder abgeschlossenen Systems mit ε, so wird ε geändert, wenn wir dem System Wärme zuführen, oder wenn von ihm eine Arbeit geleistet wird und zwar ist nach dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie der Zuwachs der Energie gleich der zugeführten Wärme vermindert um die geleistete Arbeit:

1) $$d\varepsilon = \mathfrak{A} d\Omega - p dv.$$

Nun hat aber das betrachtete System die Eigenthümlichkeit, daß mit jeder äußeren, sichtbaren Zustandsänderung eine innere, verborgene Aenderung verbunden ist, die in dem Uebergang einer gewissen Wassermenge aus einer Phase in eine andere besteht. Der Zustand unseres Systemes ist also durch die Angabe von Volumen, Druck und Temperatur nicht vollständig beschrieben, sondern zu diesen äußeren kommen noch gewisse innere oder verborgene Zustandsgrößen hinzu. Diese sind in unserem Falle die zu irgend einer Zeit vorhandenen Mengen von flüssigem Wasser und Wasserdampf m_1 und m_2. Wenn nun die Menge des flüssigen Wassers vermehrt wird um dm_1, so wird die Energie

der flüssigen Phase eine Zunahme erleiden, die wir gleich $\mu_1 dm_1$ setzen; hier ist μ_1 jene Funktion der Zustandsgrößen, die von Gibbs als Potential der flüssigen Phase bezeichnet wurde. Ebenso bedingt eine Vermehrung der Dampfmenge um dm_2 einen Energiezuwachs vom Betrage $\mu_2 dm_2$, wenn μ_2 das Potential der gasförmigen Phase. Wenn wir nun auf die verborgenen Energieänderungen Rücksicht nehmen, so erscheint Gleichung (1) als unvollständig und muß ersetzt werden durch:

2) $$d\varepsilon = \mathfrak{A} d\Omega - p dv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2.$$

Beide Gleichungen sind aber eine Folge des Energieprincips, sie müssen neben einander bestehen, und dieses ist nur möglich, wenn

3) $$\mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 = 0.$$

Es ergiebt sich somit der Satz:

Wenn ein System mit verborgenen Zustandsgrößen im Gleichgewicht sich befindet, so müssen die mit einer Aenderung des äußeren Zustandes verbundenen inneren Energieänderungen sich wechselseitig kompensiren.

Man überzeugt sich leicht, daß der Satz für jede beliebige Zahl von inneren Zustandsgrößen richtig ist.

In dem von uns betrachteten Falle sind die Aenderungen der inneren Zustandsgrößen an die Bedingung $dm_1 + dm_2 = 0$ gebunden, da die ganze Menge des Wassers dieselbe bleiben muß. Es ergiebt sich somit:

4) $$\mu_1 = \mu_2.$$

Zwei verschiedene Phasen eines Körpers sind im Gleichgewicht, wenn ihre Potentiale gleich sind.

2. Die Phasenregel von Gibbs.

Haben wir ein System, welches aus p heterogenen Phasen d. h. aus p Theilen besteht, von denen jeder in sich chemisch und physikalisch homogen ist, und welches n verschiedene chemische Componenten enthält, so können wir als verborgene Zustandsgrößen die Mengen einführen, welche von jeder Componente in jeder Phase enthalten sind; wir haben dann np solcher Größen. Bezeichnen wir durch m_k^i die Menge der Componente i ($i = 1$ bis n) in der Phase k ($k = 1$ bis p), so ist die Bedingung für das Gleichgewicht des Systems:

5) $$\sum_1^n{}_i \sum_1^p{}_k \mu_k^i \, dm_k^i = 0.$$

Hier sind die μ Functionen der Zustandsgrößen, μ_k^i das Potential der Componente i in der Phase k. Zu der Gleichung (5) kommen noch die n Bedingungen für die Constanz der Massen:

6) $$\sum_k dm_k^i = 0.$$

Somit ist, wenn λ^i ein für die einzelne chemische Componente konstanter Faktor

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^p{}_k (\mu_k^i - \lambda^i) \, dm_k^i = 0$$

und daher

7) $$\mu_k^i = \lambda^i.$$

Im Gleichgewichtszustande hat das Potential einer chemischen Componente in allen Phasen denselben Werth.

Bei p Phasen ergeben sich für jede chemische Componente $p - 1$ Gleichungen zwischen ihren Potentialen. Bei n Componenten ist die Gesammtzahl der Gleichungen $n(p-1)$. Die einzelnen Phasen sind bestimmt einerseits durch die allen gemeinsamen Werthe von Druck und Temperatur, andrerseits durch die Verhältnisse $m_k' = m_k^2 = \cdot \cdot m_k^n$, in welchen die chemischen Componenten an ihrer Zusammensetzung betheiligt sind, im Ganzen also durch $2 + p(n-1)$ Veränderliche. Diese sind vollständig bestimmt, wenn ihre Zahl ebenso groß wie die Zahl der Gleichungen, d. h. wenn $2 + p(n-1) = n(p-1)$ oder $p = n + 2$. Die Maximalzahl der Phasen, welche neben einander im Gleichgewicht bestehen kann, ist somit um 2 größer als die Zahl der chemischen Componenten: die bekannte Phasenregel von Gibbs.

3. Potential und Energie.

Wir kehren nun zurück zu der Energiegleichung in der ausführlicheren Form, wie sie durch (2) für den Fall einer einzigen Componente und zweier Phasen dargestellt ist. Wenn die der einen und anderen Phase entsprechenden Antheile der Energie, der Wärmezufuhr, des Volumens gegeben sind, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \mathfrak{A} d\Omega_1 + \mathfrak{A} d\Omega_2 - p dv_1 \\ - p dv_2 + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2, \end{aligned}$$

oder wenn wir mit η_1 und η_2 die Entropieen bezeichnen

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \mathfrak{A} T d\eta_1 - p dv_1 + \mu_1 dm_1 + \mathfrak{A} T d\eta_2 - p dv_2 + \mu_2 dm_2.$$

Da nun ε_1 nur abhängt von η_1, v_1, m_1 und ebenso ε_2 nur von η_2, v_2, m_2 so ergiebt sich:

8)
$$d\varepsilon_1 = \mathfrak{A} T d\eta_1 - p dv_1 + \mu_1 dm_1$$
$$d\varepsilon_2 = \mathfrak{A} T d\eta_2 - p dv_2 + \mu_2 dm_2$$

und somit

9)
$$\mu_1 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial m_1}, \qquad \mu_2 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial m_2}.$$

Wenn also die Energie einer Phase als Function ihrer Entropie, ihres Volumens und ihrer Masse gegeben ist, so wird ihr thermodynamisches Potential gleich dem partiellen Differentialquotienten der Energie nach der Masse.

Für die Bildung der Energiefunktion ist die folgende Bemerkung von Wichtigkeit. Wenn Masse, Volumen und Entropie nach einem und demselben Verhältniß vergrößert werden, so wächst auch die Energie nach diesem. Sie muß also eine homogene, lineare Funktion der Entropie, des Volumens und der Masse sein. Soweit zu der Bildung der Energiefunktion Integrationen nöthig sind, müssen die Constanten so bestimmt werden, daß sie jener Bedingung genügen.

Wir gehen über zu dem allgemeinen Fall eines aus p Phasen mit n Componenten bestehenden Systemes, dessen Energiegleichung ist:

$$d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - p dv + \sum_1^n{}^i \sum_1^p{}^k \mu_k^i \, dm_k^i.$$

Bezeichnen wir durch ε_1, $\varepsilon_2 \cdot \cdot \varepsilon_p$ die Energieen der einzelnen Phasen, so ergiebt sich allgemein für die Phase k

11)
$$\mu_k^{(1)} = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial m_k^1}, \quad \mu_k^{(2)} = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial m_k^2}, \quad \cdots \mu_k^{(n)} = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial m_k^n}.$$

Die Potentiale sind somit auch in diesem Falle als die partiellen Differentialquotienten der Energie nach den Massen der Componenten definirt.

Die Wahl des Namens „Potential“ für die Funktionen μ wird gerechtfertigt durch die folgende Analogie. Der Zustand einer beliebigen Phase sei gegeben durch Entropie, Volumen und die Mengen der einzelnen in ihr enthaltenen Componenten; wenn wir alle diese Zustandsgrößen mit Ausnahme der Menge m^i einer ein-

zigen Componente unverändert erhalten, so tritt eine Vermehrung der Energie ein, welche gegeben ist durch

$$\mu^i \, dm^i$$

Es muß also eine Arbeit von diesem Betrage geleistet werden. Durch den analogen Ausdruck vde wird die Arbeit bestimmt, welche nöthig ist, um einem zu dem Potential v geladenen Conduktor die Elektricitätsmenge de zuzuführen.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß an den Grenzflächen der verschiedenen Phasen keine besonderen Energieänderungen auftreten, d. h. es ist keine Rücksicht auf die von den Kapillarspannungen herrührende Energie genommen. Die allgemeine Energiegleichung mit Einschluß der von Kapillarität und Schwere herrührenden Theile ist von Gibbs in seiner grundlegenden Abhandlung aufgestellt und diskutirt worden.

4. Das Potential einer festen chemischen Verbindung und die Gleichung der Dissociation.

Wir betrachten endlich noch den Fall, daß eine Phase ganz oder zum Theil aus einer festen und nicht dissociirten chemischen Verbindung zweier oder mehrerer Componenten besteht. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Annahme, daß in der Phase 1 die Componenten 1 und 2 chemisch verbunden sind, so daß $m_1^{(1)} : m_1^{(2)} = \alpha : \beta$, so gelten die Gleichungen:

$$\sum_1^p \mu_k^{(1)} \, dm_k^{(1)} + \sum_1^p \mu_k^{(2)} \, dm_k^{(2)} = 0$$

$$\sum dm_k^{(1)} = 0 \qquad \sum dm_k^{(2)} = 0$$

$$\frac{dm_1^{(1)}}{\alpha} - \frac{dm_1^{(2)}}{\beta} = 0$$

Woraus, wenn $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ und $\varkappa$ drei unbekannte Faktoren sind,

$$\mu_1^{(1)} - \lambda^{(1)} - \frac{\varkappa}{\alpha} = 0, \quad \mu_2^{(1)} = \mu_3^{(1)} = \cdot\cdot = \mu_p^{(1)} = \lambda^{(1)}$$

$$\mu_1^{(2)} - \lambda^{(2)} + \frac{\varkappa}{\beta} = 0, \quad \mu_2^{(2)} = \mu_3^{(2)} = \cdot\cdot = \mu_p^{(2)} = \lambda^{(2)}$$

und nach Elimination von $\varkappa$

$$\alpha\mu_1^{(1)} + \beta\mu_1^{(2)} = \alpha\lambda^{(1)} + \beta\lambda^{(2)}.$$

Die Potentiale $\mu_1^{(1)}$ und $\mu_1^{(2)}$, welche den Componenten der chemischen

Verbindung zukommen, können somit nicht einzeln bestimmt werden, sondern nur in der linearen Verbindung $\alpha\mu_1^{(1)} + \beta\mu_1^{(2)}$. Setzen wir diese gleich $(\alpha+\beta)\mu_1$, so ist μ_1 nichts anderes als das Potential des homogenen bei der chemischen Verbindung entstehenden Körpers K. Zunächst ist nemlich der Energie-Zuwachs, welcher den Aenderungen $dm_1^{(1)}$ und $dm_1^{(2)}$ der Componenten entspricht: $d\varepsilon = \mu_1^{(1)} dm_1^{(1)} + \mu_1^{(2)} dm_1^{(2)}$. Setzen wir den ganzen Zuwachs der Masse des Körpers K

$$dm_1^{(1)} + dm_1^{(2)} = dm_1,$$

so ist:

$$dm_1^{(1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} dm_1, \qquad dm_1^{(2)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} dm_1$$

somit

$$d\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mu_1^{(1)} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mu_1^{(2)}\right) dm_1 = \mu_1\, dm_1,$$

womit die Richtigkeit der Bemerkung bewiesen ist. Zur Bestimmung des Potentiales μ_1 ergiebt sich jetzt die Gleichung

$$(\alpha+\beta)\,\mu_1 = \alpha\lambda^{(1)} + \beta\lambda^{(2)}.$$

Diese ist keine andere als die Dissociationsgleichung eines in zwei Bestandtheile sich spaltenden Körpers und die von uns angestellte Betrachtung führt daher hinüber zu der Theorie der Dissociationserscheinungen [1]).

5. Das Potential in der Theorie von van der Waals.

Es sei eine gewisse Menge eines einfachen Gases gegeben; die Anzahl seiner Moleküle sei N, ihre Masse m; das Volumen v, die Temperatur T, der Druck p; c_v sei die specifische Wärme bei konstantem Volumen, R die Constante des Gasgesetzes, $\mathfrak{A}$ das mechanische Aequivalent der Wärme und C, A, b drei weitere Constante; dann ist die Energie des Gases nach der Theorie von van der Waals

$$12) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2} NmC - 2\pi N^2 m^2 \frac{A}{v} + \mathfrak{A} Nmc_v T$$

1) Vgl. auch Riecke, Ueber stufenweise Dissociation und die Dampfdichte des Schwefels. Goett. Nachr. 1890. S. 360. Zeitschr. für phys. Chem. Bd. VI. S. 430 und Riecke, Das thermische Potential für verdünnte Lösungen. Goett. Nachr. 1890. S. 437. Zeitschr. für phys. Chem. Bd. VII. S. 97. Wied. Ann. Bd. 42 S. 483.

der Druck

13) $$p = \frac{NmRT}{v-b} - \frac{2\pi N^2 m^2 A}{v^2}.$$

Für den Zuwachs der Energie gilt die Gleichung

14) $$d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - p dv$$

wo η die Entropie.

Substituiren wir hier den Werth von p, so wird:

$$d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - \frac{NmRT}{v-b} dv + \frac{2\pi N^2 m^2 A}{v^2} dv.$$

Andererseits ist:

$$d\varepsilon = \mathfrak{A} N m c_v d T + \frac{2\pi N^2 m^2 A}{v^2} dv.$$

Somit:

15) $$\mathfrak{A} d\eta = \frac{NmR}{v-b} dv + \mathfrak{A} N m c_v \frac{dT}{T}$$

und

15') $$\eta = \frac{1}{\mathfrak{A}} NmR \log \frac{v-b}{Nm} + Nmc_v \log T.$$

Bei einer solchen Bestimmung der Integrationskonstanten wird η gleich Null, wenn $T \left\{\frac{v-b}{Nm}\right\}^{k-1} = 1$, wo $k = c_p/c_v$, gleich dem Verhältniß der specifischen Wärmen und

16) $$T = \left(\frac{Nm}{v-b}\right)^{k-1} e^{\eta/Nmc_v}$$

Substituiren wir diesen Werth in dem Ausdruck der Energie und setzen wir zugleich die Constante C Null, so wird mit $b = Nm\beta$

17) $$\varepsilon = \mathfrak{A} c_v N m \left(\frac{v}{Nm} - \beta\right)^{-(k-1)} e^{\eta/c_v Nm} - 2\pi A \frac{N^2 m^2}{v}.$$

Die Energie ist damit als eine homogene lineare Funktion der Entropie η, des Volumens v und der Masse Nm dargestellt. Folglich ist das Potential des Gases:

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial Nm} = \left(\mathfrak{A} c_v + R \frac{v/Nm}{v/Nm - \beta} - \frac{\mathfrak{A}\eta}{Nm}\right) T - 4\pi A \frac{Nm}{v}$$

18) $$= \left\{\mathfrak{A} c_v (1 - \log T) + R\left(\frac{v/Nm}{v/Nm - \beta} - \log (v/Nm - \beta)\right)\right\} T - 4\pi A \frac{Nm}{v}$$

$$= \mathfrak{A} c_v\, T(1 - \log T) + \frac{pv}{Nm} - RT \log (v/Nm - \beta) - 2\pi A \frac{Nm}{v}.$$

In den vorhergehenden Formeln sollen nun die kritischen Daten des Gases an Stelle der Constanten A und β, beziehungsweise b eingeführt werden. Bezeichnen wir Volumen, Druck und Temperatur im kritischen Zustand durch φ_0, π_0 und ϑ_0, so ist:

19) $$\frac{NmR}{\pi_0 \varphi_0} = \tfrac{8}{3} \frac{1}{\vartheta_0}, \quad b = Nm\beta = \tfrac{1}{3} \varphi_0, \quad 2\pi N^2 m^2 A = 3\pi_0 \varphi_0^2.$$

Hiermit ergiebt sich für die Energie

20) $$\frac{\varepsilon}{NmR\vartheta_0} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{T}{\vartheta_0} - \tfrac{9}{8} \cdot \frac{\varphi_0}{v},$$

den Druck

21) $$\frac{p}{\pi_0} = \tfrac{8}{3} \frac{1}{\frac{v}{\varphi} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{T}{\vartheta_0} - 3 \frac{\varphi_0^2}{v^2},$$

die Entropie:

$$\frac{\mathfrak{A}\eta}{NmR} = \log \left(\frac{v}{\varphi_0} - \tfrac{1}{3}\right) + \frac{1}{k-1} \log \frac{T}{\vartheta_0} - \log \tfrac{8}{3} \frac{\pi_0}{R} + \frac{k}{k-1} \log \vartheta_0.$$

Bezeichnen wir die Entropie im kritischen Punkt mit η_0, so ist:

22) $$\frac{\mathfrak{A}\eta_0}{NmR} = \log \tfrac{2}{3} - \log \tfrac{8}{3} \frac{\pi_0}{R} + \frac{k}{k-1} \log \vartheta_0$$

und

23) $$\frac{\mathfrak{A}(\eta - \eta_0)}{NmR} = \log \tfrac{3}{2} \left(\frac{v}{\varphi_0} - \tfrac{1}{3}\right) + \frac{1}{k-1} \log \frac{T}{\vartheta_0}.$$

Für das Potential erhalten wir:

24) $$\frac{\mu}{R\vartheta_0} = \left(\log \tfrac{8}{3} \frac{\pi_0}{R} - \frac{k}{k-1} \log \vartheta_0\right) \frac{T}{\vartheta_0} + \frac{1}{k-1}\left(1 - \log \frac{T}{\vartheta_0}\right) \frac{T}{\vartheta_0} + \left\{\frac{\frac{v}{\varphi_0}}{\frac{v}{\varphi_0} - \frac{1}{3}} - \log \left(\frac{v}{\varphi_0} - \tfrac{1}{3}\right)\right\} \frac{T}{\vartheta_0} - \tfrac{9}{4} \frac{\varphi_0}{v}$$

oder mit Benutzung von (21)

24′) $$\frac{\mu}{R\vartheta_0} = \left(\log\tfrac{8}{3}\frac{\pi_0}{R} - \frac{k}{k-1}\log\vartheta_0\right)\frac{T}{\vartheta_0} + \frac{1}{k-1}\left(1 - \log\frac{T}{\vartheta_0}\right)\frac{T}{\vartheta_0} + \tfrac{3}{8}\frac{pv}{\pi_0\varphi_0} - \log\left(\frac{v}{\varphi_0} - \tfrac{1}{3}\right)\frac{T}{\vartheta_0} - \tfrac{9}{8}\frac{\varphi_0}{v}.$$

Im kritischen Punkt ist der Werth des Potentiales

25) $$\frac{\mu_0}{R\vartheta_0} = \log\frac{8\pi_0}{3R} - \frac{k}{k-1}\log\vartheta_0 + \frac{1}{k-1} + \log\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}.$$

Benutzen wir endlich die kritischen Daten noch zu der Umformung von Gl. (17), so ergiebt sich:

26) $$\frac{\varepsilon}{NmR\vartheta_0} = \frac{1}{k-1}\left\{\tfrac{3}{2}\left(\frac{v}{\varphi_0} - \tfrac{1}{3}\right)\right\}^{-(k-1)} e^{\frac{\eta-\eta_0}{Nmc_v}} - \tfrac{9}{8}\frac{\varphi_0}{v}.$$

6. Einführung der reducirten Zustandsgrössen.

In den Gleichungen (21) und (22) drücken wir Volumen, Temperatur und Druck in Theilen der kritischen Werthe aus, indem wir die neuen Veränderlichen

$$\varphi = \frac{v}{\varphi_0}, \qquad \vartheta = \frac{T}{\vartheta_0}, \qquad \pi = \frac{p}{\pi_0}$$

einführen, die sogenannten reducirten Zustandsgrößen. Wir erhalten dann:

27) $$\pi = \tfrac{8}{3}\frac{\vartheta}{\varphi - \frac{1}{3}} - \frac{3}{\varphi^2}$$

und:

$$\frac{\mu}{R\vartheta_0} = \left(\log\frac{8\pi_0}{3R} - \frac{k}{k-1}\log\vartheta_0\right)\vartheta + \frac{1}{k-1}(1 - \log\vartheta)\vartheta + \left\{\frac{\varphi}{\varphi - \frac{1}{3}} - \log(\varphi - \tfrac{1}{3})\right\}\vartheta - \tfrac{9}{4}\cdot\frac{1}{\varphi}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

28) $$\mathfrak{T} = \left(\log\frac{8\pi_0}{3R} - \frac{k}{k-1}\log\vartheta_0\right)\vartheta + \frac{1}{k-1}(1 - \log\vartheta)\vartheta$$

so ergiebt sich:

29) $$\frac{\mu}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T} = \left\{\frac{\varphi}{\varphi - \frac{1}{3}} - \log(\varphi - \tfrac{1}{3})\right\}\vartheta - \frac{9}{4\varphi}.$$

Hier ist $\mathfrak{T}$ eine Funktion der reducirten Temperatur, deren Coëfficienten von den individuellen Constanten des Gases abhängen. Die Gleichungen 27 und 29 haben die Eigenschaft, daß ihre rechten Seiten nur die reducirten Variabelen, gar keine individuellen Konstanten der Stoffe mehr enthalten. Der reducirte Druck und

die Größe $\frac{\mu}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T}$ werden somit bei allen Gasen durch dieselbe Funktion des reducirten Volumens und der reducirten Temperatur gegeben. Dasselbe gilt für alle isothermen Aenderungen der Energie und Entropie, wenn als Einheit der ersteren das Produkt $NmR\vartheta_0$, der letzteren das Produkt $NmR/\mathfrak{A}$ benutzt wird. Endlich ergiebt sich derselbe Satz auch für die Verdampfungswärme, wenn als Wärmeeinheit das Product $NmR\vartheta_0/\mathfrak{A}$ genommen wird. Dieß ist zuerst von Nernst in seiner theoretischen Chemie S. 204 bemerkt worden.

7. Die Grenzkurve des Gebietes, in dem Flüssigkeit und Dampf im Gleichgewicht sich befinden.

Wir ertheilen der Temperatur einen bestimmten unveränderlichen Werth und lassen das Volumen φ variiren. Gleichung (27) giebt uns die den verschiedenen Werthen von φ entsprechenden Drucke π, Gleichung (29) die zugehörigen Werthe von $\frac{\mu}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T}$. Das Volumen φ tragen wir auf einer horizontalen Axe als Abscisse ab, die Werthe von π und von $\frac{\mu}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T}$ senkrecht dazu als Ordinaten; wir erhalten dann die Curven C_π und C. Auf der Axe φ nehmen wir zwei Punkte α und β mit den Abscissen φ_1 und φ_2; die ihnen entsprechenden Ordinaten schneiden die Curve C_π in den Punkten A und B, die Curve C in den Punkten **A** und **B**. Innerhalb eines gewissen Gebietes ist es möglich die Punkte α und β so zu wählen, daß das Viereck AB**AB** ein Rechteck wird. Die Punkte A und B repräsentiren dann zwei Zustände des Körpers, welche gleiche Temperatur $\vartheta_1 = \vartheta_2$, und gleichen Druck $\pi_1 = \pi_2$ besitzen und für welche überdieß

$$\frac{\mu_1}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T} = \frac{\mu_2}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T}, \text{ d. h. } \mu_1 = \mu_2$$

ist. In den beiden Punkten hat die Substanz also auch das gleiche Potential, d. h. die beiden durch A und B dargestellten Zustände bestehen im Gleichgewicht neben einander. Die Linie AB entspricht dem Uebergang von der flüssigen zu der dampfförmigen Phase bei der Temperatur ϑ, der durch sie bestimmte Druck π ist der reducirte Sättigungsdruck, die Volumina φ_1 und φ_2 werden von der Substanz eingenommen, wenn sie sich entweder ganz im flüssigen oder ganz im gasförmigen Zustande befindet. Construiren wir in derselben Weise die Punkte $A'B'$, $A''B''$.. auf den Isothermen ϑ', ϑ''... so erhalten wir eine zusammen-

hängende durch den kritischen Punkt hindurchgehende Curve $\ldots A'' A' A \ldots B B' B'' \ldots$; sie ist die Grenzkurve des Gebietes, in welchem die Substanz gleichzeitig in ihrer flüssigen und ihrer dampfförmigen Phase vorhanden ist. In der beigegebenen Figur geben die stark ausgezogenen Curven den reducirten Druck π in seiner Abhängigkeit von dem Volumen φ für die kritische Temperatur, $\vartheta = 1$, und die reducirten Temperaturen $\vartheta = 0{,}9$ und $\vartheta = 0{,}7$. Die schwach gezeichneten Curven stellen die Werthe von $\mu' = \frac{\mu}{R\vartheta_0} - \mathfrak{T}$ dar. Die Drucke π sind von dem Anfangspunkt 0 und nach oben hin abgetragen; die Strecke $00'$ entspricht dem kritischen Druck, d. h. dem Werthe $\pi = 1$. Die negativen Werthe von μ' sind von $0'$ aus nach unten hin abgetragen; es entspricht also die Strecke $0'0$ dem Werthe $\mu' = -1$. Die gestrichelte Curve ist die Grenzkurve des Gebietes, in welchem Gleichgewicht zwischen der flüssigen und der dampfförmigen Phase besteht. Die mit Kreisen umzogenen Punkte sind die auf den Isothermen $\vartheta = 0{,}9$ und $\vartheta = 0{,}7$ liegenden Punkte A und B, die mit den korrespondirenden Punkten **A** und **B** der zugehörenden Potentialkurven ein Rechteck bilden. Die Resultate der für eine Reihe reducirter Temperaturen ausgeführten Construction sind in der folgenden Tabelle enthalten. ϑ bezeichnet die reducirte Temperatur, π den reducirten Sättigungsdruck, φ_l das reducirte Volumen im flüssigen, φ_d das im dampfförmigen Zustand.

ϑ	π	φ_l	φ_d
1	1	1	1
0,95	0,807	0,693	1,78
0,90	0,650	0,602	2,32
0,85	0,507	0,553	3,05
0,80	0,384	0,517	4,14
0,75	0,288	0,489	5,53
0,70	0,199	0,466	7,75
0,65	0,137	0,448	10,90
0,60	0,109	0,432	16,60.

Dagegen ergiebt sich aus den Beobachtungen von Young für Fluorbenzol die Zusammenstellung:

ϑ	π	φ_l	φ_d
0,95	0,678	0,570	2,82
0,90	0,472	0,507	4,16
0,85	0,308	0,463	8,12
0,80	0,180	0,435	13,10
0,75	0,115	0,415	23,72
0,70	0,055	0,396	44,0

Die Differenzen zwischen den beobachteten Werthen und den aus der van der Waals'schen Zustandsgleichung abgeleiteten sind

überraschend groß. Schon durch die Untersuchung von Amagat wurde die Anschauung nahe gelegt, daß die van der Waals'sche Theorie sich gewissermaßen auf eine ideale Substanz beziehe, die nur in ihrem qualitativen Verhalten den realen Körpern ähnlich ist, während sie in ihren quantitativen Beziehungen weit von ihnen abweicht. Diese Auffassung wird durch das vorhergehende Resultat in schlagender Weise bestätigt. Trotzdem erscheint das Studium der van der Waals'schen Gleichung nicht überflüssig, denn die Kenntniß der Abweichungen, welche die realen Substanzen jenem idealen Falle gegenüber zeigen, enthält einen Leitfaden für die Correktion des Gesetzes, wie sie in verschiedener Weise durch Clausius und Amagat angebahnt worden ist.

8. Bemerkung über labile Zustände.

Bei einem heterogenen System, dessen Phasen sich im Gleichgewichte befinden, erscheint der Potentialsatz als eine einfache Erweiterung des Energieprincipes. Die Einführung der Entropie wird erst nothwendig, wenn man den analytischen Ausdruck des Potentiales aufstellen will. Die Behandlung labiler Systeme dagegen erfordert von vornherein die Einführung einer weiteren Annahme, die in der einen oder andern Weise auf das Princip von der Vermehrung der Entropie zurückkommen wird. Lassen wir in unserer Figur den Zustand des Dampfes auf der Isotherme $\vartheta = 0{,}9$ über B hinausrücken bis zu einem Punkte D, so erhalten wir Dampf, dessen Druck größer ist als der Sättigungsdruck. Bringen wir diesen in Berührung mit flüssigem Wasser, dessen Zustand durch den über A in gleicher Höhe mit D liegenden Punkt C dargestellt wird, so haben wir ein labiles System.

Bei gleichbleibender Energie verändert sich dieses so, daß die Entropie wächst. Wird das Volumen konstant erhalten, so ergiebt sich die Gleichung

$$T d\eta + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 = 0.$$

Da $d\eta$ positiv ist, so muß

$$\mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 < 0$$

sein. Man kann ebenso die Entropie konstant lassen; dann muß dem System Wärme entzogen werden, die Energie sinkt und es ist wieder

$$\mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 = d\varepsilon = ncg.$$

Wenn dm_1 negativ ist, so muß $\mu_1 > \mu_2$ sein; der Uebergang der Substanz geschieht von der Phase mit größerem Potential zu der mit kleinerem, so daß auch in dieser Beziehung die Analogie mit dem Verhalten der Elektricität bestehen bleibt.

Zu: Eduard Riecke. Der Satz vom thermodynamischen Potential.

Nachr. von der K. G. d. W. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1894. Nr. 2.

π

$\left.\begin{matrix}\pi = 1\\ \mu = 0\end{matrix}\right\} 0'$

$\left.\begin{matrix}\pi = 0\\ \mu = -1\end{matrix}\right\} 0$

A

A'

B

B'

1 2 3 4 5 6 7 8 φ

$\vartheta = 1$

$\vartheta = 0{,}9$

$\vartheta = 0{,}7$

$\vartheta = 0{,}7$

$\vartheta = 0{,}9$

Die Isoklinenkarte von Whiston und die säkulare Aenderung der magnetischen Inklination im östlichen England.

Von

Wilhelm Felgentraeger.

Vorgelegt von Schering in der Sitzung vom 9. April 1894.

Hansteen schlug in seinem Werke über den Magnetismus der Erde vor, die Isoklinen „Wilcke'sche Linien" zu nennen. Er ging dabei von der noch jetzt herrschenden Annahme aus, daß die von Wilcke[1]) 1768 veröffentlichte Isoklinenkarte die älteste sei. Es wäre merkwürdig, wenn die Darstellung der magnetischen Elemente durch Kurven auf Karten erst so spät und nicht von einem Landsmann Halley's von der Deklination auf die Inklination übertragen worden wäre. Als Grund könnte nur gelten, daß erst Wilcke (namentlich durch Ekeberg's und De la Caille's Reisen) in den Besitz eines hinreichenden Beobachtungsmateriales gelangt sei, um die Isoklinen mit leidlicher Sicherheit zu ziehen.

Um so erstaunter war der Verfasser, in einem Buche, dessen Titel ziemlich häufig angeführt wird, und welches auch in mehreren Exemplaren existiert[2]), zwei in der Litteratur bisher nirgends erwähnte Isoklinenkarten von bedeutend höherem Alter zu finden, welche allerdings nicht, wie Wilcke's Karte, die ganze Erde, sondern nur den östlichen Teil Englands und den Kanal darstellen. Der Titel dieses Buches lautet: *„The Longitude and Latitude Found by the Inclinatory or Dipping Needle. By William Whiston*[3]) *M. A.*

1) J. C. Wilcke, Försök til en Magnetisk Inclinations Charta; Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar 1768, p. 193—225, und Tab. VI.

2) Verf. hat die Exemplare der Göttinger Universitätsbibliothek und der Berliner Königl. Bibliothek eingesehen. Ein weiteres wird in dem Katalog der Crawford Library, Edinburgh, aufgeführt.

3) William Whiston, geb. 1667, gest. 1752, namhafter englischer Theologe, war 1703—1710 als Newtons Nachfolger Lucasian Professor of Mathematics.

Sometime Professor of Mathematicks in the University of Cambridge". London, 1721. 8⁰. Whiston sucht in diesem Werke das berühmte Problem der Längenbestimmung zur See, auf dessen Lösung das englische Parlament mehrmals große Preise gesetzt hatte, dadurch zu lösen, daß er an Stelle der Längen- und Breitenbestimmung eine Breitenbestimmung und Messung der magnetischen Inklination setzt. Als Genauigkeitsgrenze der letzteren giebt er vorläufig 4′ an, indessen laufen die Isoklinen in mittleren Breiten wohl stets zu nahe parallell mit den Breitenkreisen, als daß eine solche Bestimmungsmethode jemals hätte praktisch verwendet werden können. Außerdem finden sich noch Experimente über die Fernwirkung von Magneten (vorzugsweise Terellen) in dem Buche. Dasselbe besteht aus der Widmung an die Längenbestimmungskommission, unter deren Mitgliedern wir auch Newton und Halley finden; ferner aus einer „Historical Preface" (XXVIII Seiten); den oben erwähnten beiden Karten und dem eigentlichen Text (115 Seiten). Als Anhang ist Norman's *„Newe Attractive"* wiederabgedruckt, ein Werk, welches also schon damals selten war.

Die beiden Karten (im Maaßstabe von 1 zu 3 000 000) enthalten die Isoklinen ganz in der noch heute gebräuchlichen Form [1]), und zwar nach den eigenen Messungen des Verfassers. Dieselben sind in den Jahren 1719 und 1720 gemacht und die Beobachtungen jedes Jahres auf einer Karte zur Darstellung gebracht. Im Jahre 1719 bediente sich Whiston eines Instrumentes mit 12zölliger Nadel. Die Beobachtungsresultate an 9 Orten sind in Graden und $\frac{1}{8}$ Graden auf der Karte jedem dieser Orte beigeschrieben. Indessen sind dieselben, wie Whiston hervorhebt, mit einem nahezu

---

Er wurde 1710 wegen seines Arianismus dieser Stelle entsetzt und lebte von da als Privatmann in London. 1720 wurde er zum Mitglied der Royal Society vorgeschlagen, jedoch da Newton sich (aus religiösen Gründen?) widersetzte, nicht gewählt. Vergl. Poggendorff, Handwörterbuch; und Hertzog, Realencyclopädie für Theologie und Kirche.

1) Es ist aus der oben angezogenen Wilcke'schen Arbeit nicht mit Sicherheit zu ersehen, ob Wilcke das Whiston'sche Buch selbst in Händen gehabt hat. Er zitiert es öfter, (l. c. p. 197, p. 219) aber mit ungenauem Titel und ohne der Karten mit einem Worte Erwähnung zu thun. Man wird Wilcke also die Selbständigkeit der Erfindung nicht ohne weiteres absprechen dürfen, abgesehen davon, daß ihm der Ruhm, zuerst eine Isoklinenkarte *der Welt* geliefert zu haben, nicht abzusprechen ist. Noch mag erwähnt werden, daß Anders Celsius Aufsatz: „Omdöme on Whistons bok angående sättet att finna longituden på sjön", Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar, 1740, sich nicht mit dem hier besprochenen Buche beschäftigt, sondern mit einer später von Whiston vorgeschlagenen Methode.

konstanten Fehler von 1,4° behaftet, der von der Durchbiegung der Nadel herrührt. Diese Karte bietet somit nur historisches Interesse.

Die Messungen des Jahres 1720, welche der zweiten zu Grunde liegen, sind mit einer Nadel von der sehr großen Länge $47\frac{1}{2}$ Zoll (= 121,47 cm.) gemacht. Sie wog 4015 grain (= 260,17 grm.) Nimmt man an, sie sei prismatisch gewesen, so ergiebt ein Querschnitt von 0,2746 cm.^{2} (Spez. Gew. = 7,8 angenommen.) Sie hatte also denselben Querschnitt wie ein Cylinder von 0,694 cm Durchmesser. Schon ein Gewicht von $\frac{1}{120}$ bis $\frac{1}{130}$ Grain (= etwa 0,5 mg) brachte vor ihrer Magnetisierung einen Ausschlag hervor, sie war also auch ziemlich beweglich. An einer Längsteilung ließ sich auf ihr ein 2,44 grain = (0,158 gr.) schweres Laufgewicht verschieben und es wurden *vor* ihrer Magnetisierung die Ruhelagen beobachtet, welche verschiedenen Ständen des Laufgewichtes entsprachen. Nun wurden sie magnetisiert und das Laufgewicht so verschoben, daß die Nadel denselben Stand einnahm, den sie bei gleicher Stellung des Laufgewichtes im unmagnetischen Zustande gehabt hatte. Dadurch ist ein eventuell von der Biegung herrührender Fehler [1]) eliminiert.

Die Ableitung der Ruhelage erfolgte durch Beobachtung der Umkehrpunkte der etwas schwingenden Nadel.

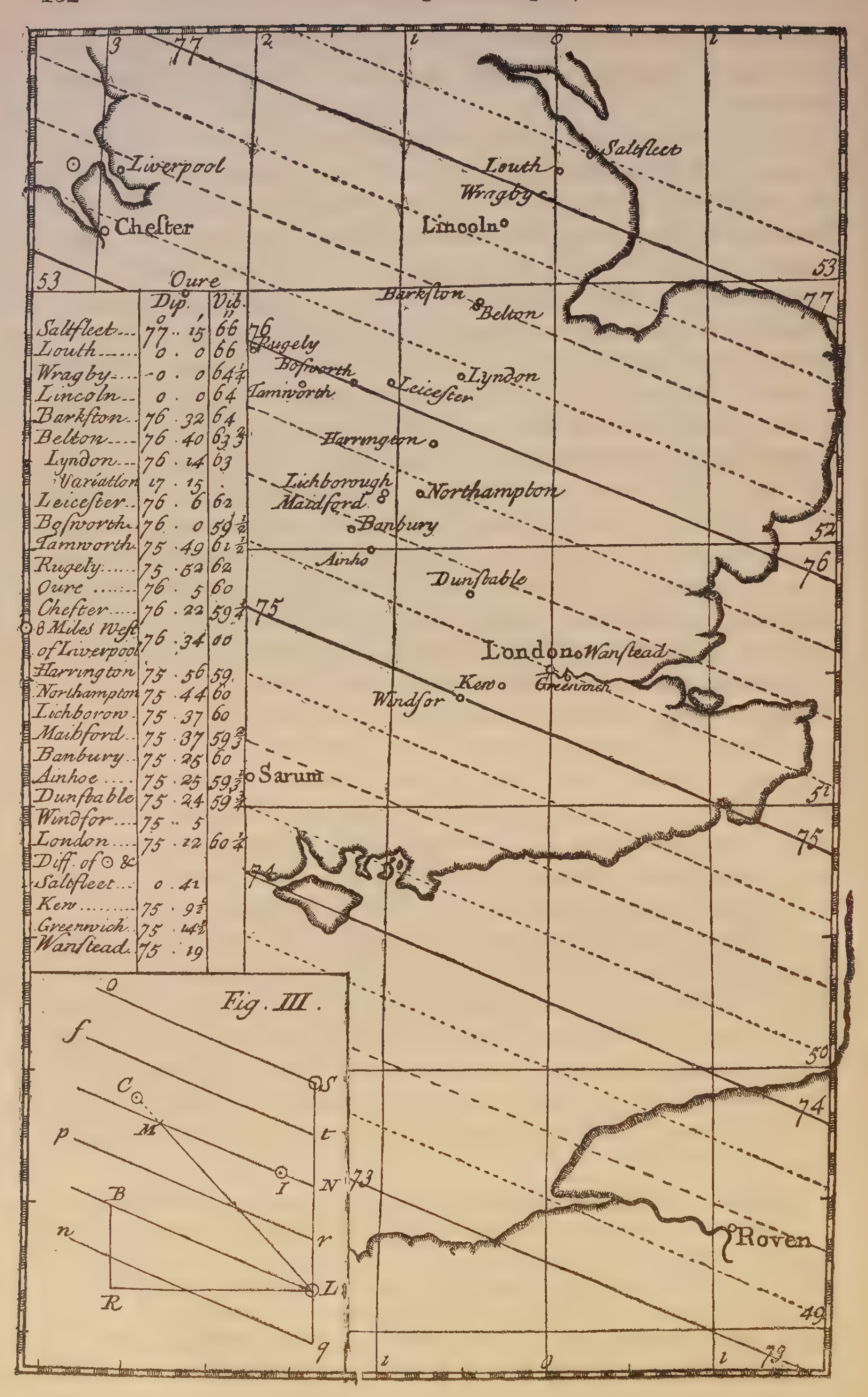
Ob dieselbe umgelegt oder ob eine Drehung des Instrumentes um eine vertikale Axe [2]) um 180° stattgefunden hat, ist nicht aus dem Text zu ersehen, ebensowenig wie die Teilung beschaffen war. Ummagnetisiert ist die Nadel sicher nicht, bei ihrer sehr schlanken Gestalt kann aber der Unterschied zwischen magnetischer und mechanischer Axe nur sehr klein gewesen sein-

Die mit diesem Instrument beobachteten Werte sind in Graden und Minuten auf einer Tafel am Rande der Karte angegeben. Die umstehende Karte ist eine getreue Kopie der Whiston'schen. Auf derselben bedarf wohl nur noch die mit „Vib.“ überschriebene Spalte einer Erklärung. In diese Rubrik sind eingetragen: „The Seconds wherein my Needle perform'd a single horizontal Vibration of about 120 Degrees from the Magnetic Meridian.“ (pag. 112.)

---

1) Eine ähnliche Kompensation hat später Brander (Beschreibung des magnetischen Declinatorii und Inclinatorii, Augsburg 1779) angebracht. Noch in neuerer Zeit haben Maxwell (Electricity and Magnetism vol. II, p. 117) und Schuster (Philosoph. Magaz. Bd. XXXI 1891 p. 275) auf die Schädlichkeit der Biegung der Inklinationsnadeln hingewiesen und dadurch das Zutrauen zu absoluten Messungen mit dem Nadelinklinatorium noch mehr erschüttert.

2) Die letztere Methode war Whiston sehr wohl bekannt, er giebt sie



	Oure Dip. ° ′	Vib. ″
Saltfleet	77 . 15	66
Louth	0 . 0	66
Wragby	0 . 0	64¼
Lincoln	0 . 0	64
Barkston	76 . 32	64
Belton	76 . 40	63⅔
Lyndon	76 . 14	63
Variation	17 . 15	.
Leicester	76 . 6	62
Bosworth	76 . 0	59½
Tamworth	75 . 49	61½
Rugely	75 . 52	62
Oure	76 . 5	60
Chester	76 . 22	59¾
☉ 8 Miles West of Liverpool	76 . 34	00
Harrington	75 . 56	59
Northampton	75 . 44	60
Lichborow	75 . 37	60
Maidford	75 . 37	59⅔
Banbury	75 . 25	60
Ainhoe	75 . 25	59⅓
Dunstable	75 . 24	59¾
Windsor	75 . 5	
London	75 . 22	60¼
Diff. of ☉ & Saltfleet	0 . 41	
Kew	75 . 9½	
Greenwich	75 . 14½	
Wanstead	75 . 19	

Die Schwingungen hat Whiston, wie aus dem ferneren Text klar hervorgeht, angestellt, um horizontale und (durch Multiplikation mit der Sekante der Inklination) totale Intensitäten mit einander zu vergleichen. Die Schwingungsdauern sind aber natürlich zu diesem Zwecke unbrauchbar, da erst Canton nach der Mitte des 18. Jahrhunderts die regelmäßige Aenderung des magnetischen Momentes einer Nadel mit der Temperatur bei geringen Aenderungen derselben entdeckte. Indessen *muß man nach dem Vorliegenden Whiston nicht nur die Erfindung der Isoklinen zusprechen, sondern auch anerkennen, daß er der erste gewesen ist, der magnetische Intensitäten zu vergleichen suchte.*

„Fig. III“ auf der besprochenen Karte giebt die elementare Konstruktion, welche Whiston zur Zeichnung der Isoklinen aus den Beobachtungen an 3 Punkten benutzte.

Wenn wir die Lage der Isoklinen in England um jene Zeit ermitteln wollen, so ist diese zweite Karte mit ihren Angaben der anderen weit vorzuziehen, sowohl wegen der Abwesenheit des Biegungsfehlers als auch wegen der Anzahl der Beobachtungen und des besseren Instrumentes. Es kommt hinzu, daß Whiston in London die Beobachtung nach der gewöhnlichen Methode geprüft hat durch Beobachtung der Schwingungsdauer, einmal wenn die Nadel in der Inklinationsrichtung sich befand, das anderemal, wenn die Nadel in der Horizontalebene oszillierte. Er giebt aber an, daß das letztere Experiment nur als Kontrolle anzusehen sei, da es geringere Genauigkeit besitze.

Die folgende Tabelle enthält die Inklinationsmessungen der Whiston'schen zweiten Karte in einer Form, wie sie zur Bestimmung der Isoklinen geeignet ist, und zwar befinden sich in der ersten Rubrik die Beobachtungsorte, in der zweiten und dritten die geographischen Positionen derselben. Die letzteren mußten leider sehr verschiedenen Autoritäten entnommen werden, es sind daher in der nächsten Spalte die Quellen gekennzeichtet. Es bedeutet: 1: Littrow, Verzeichnis geographischer Ortsbestimmungen, Anhang zu Gehler's Physikalischem Lexikon, 2: Stieler's Handatlas Karte Nr. 39, 3: Andree's Handlas, Auflage 1891, Blatt 70—71, 4: Messung auf Whiston's Karte. Es folgen nun die von Whiston beobachteten Inklinationswerte unter der Bezeichnung i_b. Dabei sind die Minuten in Bruchteile des Grades verwandelt.

(pag. 6) als ein gutes Mittel an, in Verbindung mit einer Libelle den Kollimationsfehler des Kreises zu eliminieren.

Die Spalte i_r enthält die nach einer später entwickelten Formel berechneten Werte für die Inklination, und den Schluß bildet das Verzeichnis der Größen: $\delta = i_b - i_r$.

Nr.	Ort.	Länge $= \lambda$	Breite $= \varphi$	Autor.	i_b	i_r	$\delta = i_b - i_r$
1	Saltfleet	−0,19°	53,42°	2	77,25°	77,24°	+0,01
2	Wanstead	−0,04	51,58	1	75,32	75,29	+0,03
3	Greenwich	±0,00	51,48	1	75,24	75,19	+0,05
4	London [1])	+0,12	51,52	1	75,20	75,20	±0,00
5	Kew	0,31	51,47	1	75,16	75,10	+0,06
6	Dunstable	0,50	51,88	2	75,40	75,48	−0,08
7	Windsor	0,59	51,48	1	75,08	75,04	+0,04
8	Barkston	0,62	52,93	4	76,53	76,53	±0,00
9	Belton	0,65	52,94	3	76,67	76,54	+0,13
10	Lyndon	0,73	52,66	4	76,23	76,23	±0,00
11	Harrington	0,89	52,40	4	75,93	75,92	+0,01
12	Northampton	0,91	52,25	2	75,73	75,76	−0,03
13	Leicester	1,15	52,63	1	76,10	76,10	±0,00
14	Lichborough	1,19	52,22	4	75,62	75,68	−0,06
15	Maidford	1,22	52,20	4	75,62	75,63	−0,01
16	Ainhoe	1,27	52,00	4	75,42	75,41	+0,01
17	Banbury	1,33	52,06	2	75,42	75,46	−0,04
18	Bosworth	1,36	52,64	2	76,00	76,05	−0,05
19	Tamworth	1,64	52,63	2	75,82	75,97	−0,15
20	Rugely	1,93	52,77	2	75,87	76,05	−0,18
21	Oure	2,53	53,00	4	76,08	76,14	−0,06
22	Chester	2,89	53,19	1	76,37	76,25	+0,12
23	8 miles West of Liverpool.	+3,12	53,41	1	76,57	76,42	+0,15

Zu dieser Tabelle ist noch zu bemerken, daß in derselben die Orte nach der geographischen Länge, gezählt von Greenwich, positiv gegen Westen, geordnet sind, während Whiston den Meridian von London als ersten auf seiner Karte annimmt, und die Angaben weder nach λ, noch nach φ, noch nach i_b geordnet aufführt, sondern wahrscheinlich in der Reihenfolge, in welcher sie beobachtet sind.

Wollen wir das schätzbare Material dieser Tabelle in theoretischer Hinsicht verwerten, so müssen wir vorerst die Inklination darstellen als Function der geographischen Koordinaten. Da sich die Beobachtungen auf einen nur kleinen Teil der Erde erstrecken, so kann man unbedenklich diese Funktion als linear ansehen,

---

1) Im Text hat Whiston für London mehrmals den Wert 75° 10′. Worauf derselbe beruht, ist nicht genau angegeben. Indessen ist es nach p. 7 wahrscheinlich, daß es die Angabe einer vierfüßigen Nadel ist, welche Whiston *außer* der oben erwähnten von 47½ Zoll besaß.

wobei man allerdings auf die Darstellung der in England ziemlich zahlreichen aber verhältnismäßig kleinen Lokalstörungen verzichtet. Der Konvergenz der Meridiane Rechnung zu tragen, indem man die Längen mit $\cos \varphi$ multiplizierte, erschien nicht nötig, da der größte Unterschied in den so berechneten Inklinationen gegen die nach unten stehender Formel berechneten geringer ist, als 0,01°.

Wir stellen also eine Formel auf von der Gestalt:

$$i_r = i_0 + l(\lambda - \lambda_0) + p(\varphi - \varphi_0),$$

und bestimmen die Konstanten i_0, l, p nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den 23 Beobachtungen. Der Anfangspunkt der Koordinaten, also die Wahl von λ_0 und φ_0 ist zwar willkürlich, am besten setzt man aber:

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{23}\sum \lambda = +1{,}07^\circ, \quad \varphi_0 = \tfrac{1}{23}\sum \varphi = 52{,}38^\circ,$$

dann wird

$$i_0 = \tfrac{1}{23}\sum i_b = 75{,}854^\circ.$$

Da nun p sehr nahe $= +1$ wird, so substituiert man am besten $p = p' + 1$, man erhält dann die Bedingungsgleichungen in der Form:

$$i_b - i_0 - (\varphi - \varphi_0) = (\lambda - \lambda_0)\, l + (\varphi - \varphi_0) p'.$$

Aus den so gebildeten 23 Bedingungsgleichungen entstehen die zur Berechnung von l und p dienenden Normalgleichungen,

$$17{,}4938\, l + 6{,}8543\, p' = -4{,}0422,$$
$$6{,}8543\, l + 8{,}6381\, p' = -1{,}3825.$$

Daraus folgen die Werte

$$l = -0{,}2444, \quad p' = +0{,}0338.$$

Die gesuchte Formel lautet also:

I. $\quad i_r = 75{,}854^\circ - 0{,}2444\,(\lambda - 1{,}07^\circ) + 1{,}0338\,(\varphi - 52{,}38^\circ).$

Nach dieser Formel sind die in obiger Tabelle enthaltenen i_r berechnet. Ferner wurde der *mittlere Fehler* sowohl einer Beobachtung als auch der Konstanten i_0, l, p aus den Größen δ berechnet. Es ist

der mittlere Fehler einer Beobachtung: $\pm 0{,}0826^\circ = \pm 5{,}0'$,
„ von i_0 $\pm 0{,}0172^\circ = \pm 1{,}0'$,
„ von l $\pm 0{,}0233^\circ = \pm 1{,}4'$,
„ von p $\pm 0{,}0338^\circ = \pm 2{,}0'$.

Diese mittleren Fehler setzen sich zusammen aus den zufälligen Messungsfehlern und den durch lokale Störungen bedingten Abweichungen; über konstante und systematische Fehler des In-

strumentes geben sie natürlich keinen Aufschluß. Diese Fehler pflegen aber beim Inklinatorium ganz beträchtlich zu sein. Es ist daher wichtig, daß die Angabe Whistons für London wenigstens einigermaßen bestätigt wird durch fast gleichzeitige tägliche Beobachtungen Graham's[1]). Derselbe machte im Jahr 1723 von März 29.— Mai 2 Inklinationsbestimmungen. Das Mittel der 61 Beobachtungen, welche zwischen 75° 0′ und 74° 20′ schwanken, ist: 74° 40,84′. Die Variatio saecularis war für London zu jener Zeit klein und wahrscheinlich negativ, insofern nach früheren und späteren Messungen um das Jahr 1700 ein Maximum der Inklination stattgefunden haben muß. Jedenfalls war aber das Graham'sche Instrument in Hinsicht auf zufällige Beobachtungsfehler dem Whiston'schen durchaus nicht ebenbürtig, auch ist bei Graham ein Lokaleinfluß nicht ausgeschlossen, wenigstens giebt er einen solchen bei seinen gleichzeitigen Deklinationsbeobachtungen[2]) zu.

Die oben angeführte Formel regt selbstverständlich zur Vergleichung mit neueren Beobachtungen und Ergebnissen an. Es sind seitdem dreimal umfangreichere Bestimmungsreihen der magnetischen Inklination in England ausgeführt, und zwar um die Jahre 1837, 1860 und 1886. Es sei gestattet, die Resultate dieser „magnetic surveys“ in Hinsicht auf die Inklination in die Form zu bringen, welche soeben den Ergebnissen Whistons gegeben wurde. Die Beobachtungen von 1837 (und den nächstgelegenen Jahren), welche sich über ganz Großbritannien erstrecken, sind von Lloyd, Phillips, Fox, Ross und Sabine angestellt, und vom letzteren[3]) mitgeteilt und diskutiert. Aus den Beobachtungen berechnet Sabine für England, Schottland und Irland je zwei Konstanten u und r, welche mit den oben angeführten l und p verbunden sind durch die Gleichungen:

$$l = r \cos\varphi \cos u,$$
$$p = -r \sin u.$$

Für England ergiebt sich aus den dort angestellten 122 Beobachtungen, deren mittlere Länge $\lambda = +2°7'$ deren mittlere Breite $\varphi = 52°38'$ ist:

$$u = -65°5' + 6a + 2b,$$
$$r = 0{,}575 + 0{,}00007a - 0{,}00013b,$$

wo a und b die Distanzen eines Punktes vom Punkte: ($\lambda = +2°7'$, $\varphi = 52°38'$) sind, ausgedrückt in Minuten des größten Kreises

1) Phil. Trans. 1724—1725 p. 332.

2) Phil. Trans. 1724—1725 p. 107.

3) British Association Report 1838, London 1839, p. 49—196.

und gerechnet: a in der Richtung des Parallels, b in der Richtung des Meridians. Es müssen also zur Vergleichung zuerst u und r auf denselben Punkt wie Whistons Messungen reduziert werden ($\lambda = +1{,}07^\circ$, $\varphi = 52{,}38^\circ$). Man erhält

$$u = -65{,}761^\circ, \quad r = 0{,}574,$$

und daraus die Größen:

$$l = +0{,}1852^\circ, \quad p = +0{,}5234^\circ.$$

Ein Wert für i_0 ist von Sabine nicht angegeben. Unter Benutzung aller 122 Beobachtungen ergiebt sich aber für $\lambda = 2^\circ 7'$, $\varphi = 52^\circ 38'$

$$i = 70{,}219^\circ,$$

wobei zu bemerken ist, daß die Beobachtungen von Phillips, Ross und Sabine erst auf die Epoche 1837 reduziert werden mußten, wobei die jährliche Säkularänderung zu $-3{,}22'$ angenommen wurde.

Reduziert man diesen Wert auf den oben angegebenen Whiston'schen Normalpunkt, so erhält man

$$\lambda = 1{,}07^\circ, \quad \varphi = 52{,}38^\circ, \quad i_0 = 69{,}894^\circ.$$

Es entsteht also die Formel:

$$i = 69{,}894^\circ + 0{,}1852\,(\lambda - 1{,}07^\circ) + 0{,}5234\,(\varphi - 52{,}38) \quad \text{(gültig für } t = 1837{,}00). \qquad \text{II.}$$

Eine weit geringere Anzahl von Beobachtungen, als der eben entwickelten Formel zu Grunde liegen, enthält eine zweite Mitteilung Sabines[1]). Die Messungen sind fast ausschließlich von Welsh in den Jahren 1858—1861 an 25 verschiedenen Punkten Englands gemacht. Es folgten aus ihnen, wenn die oben angenommene Bezeichnungsweise beibehalten wird:

$$\lambda = +1^\circ 41' = 1{,}683^\circ, \quad \varphi = 52^\circ 20' = 52{,}333^\circ, \qquad \left.\begin{aligned} i &= 68^\circ 59{,}2', \\ u &= -71^\circ 22', \\ r &= 0{,}624, \end{aligned}\right\} t = 1860{,}00.$$

Elemente zur Reduktion von u und r auf eine andere Position sind nicht gegeben, der Verfasser hat daher zu dieser übrigens sehr geringfügigen Reduktion die Elemente von 1837 ge-

1) Sabine, Report of the Magnetic Survey of England, made at the request of the General Committee of the British Association. *British Association Report 1861, London, 1862, p. 250—279.*

nommen, um u und r auf denselben Punkt zurückzuführen, wie die beiden vorhergehenden Messungsreihen. Es war für

$$\lambda = +1{,}07^\circ, \quad i_0 = 68{,}919^\circ,$$
$$\varphi = 52{,}38^\circ, \quad u = -71{,}457^\circ,$$
$$r = 0{,}623.$$

oder, in unsere Bezeichnungsweise übertragen, es gilt die Formel:

$$\text{III.} \quad i = 68{,}919^\circ + 0{,}1556\,(\lambda - 1{,}07^\circ) + 0{,}5907\,(\varphi - 52{,}38^\circ)$$
(gültig für $t = 1860{,}00$.)

Die neuesten Beobachtungen endlich, welche gestatten, die Isoklinen für England zu bestimmen, sind von Rücker und Thorpe angestellt, und Phil. Trans. Bd. 181 (Jahrg. 1890) veröffentlicht. Beide Forscher bestimmten die magnetischen Elemente an einer sehr großen Anzahl von Orten Großbritanniens und legten am angeführten Orte die Resultate in Tabellen, Formeln und Karten nieder. Um Formeln (welche sie gleichfalls als linear annahmen) zu entwickeln, teilten sie das Land in 8 „regions", und berechneten für jedes solche Gebiet die Werte von λ_0, φ_0, i_0, l und p. Man kann nun aus drei solchen Angaben durch lineare Interpolation die Werte von i_0, l und p berechnen für irgend einen Ort, dessen Koordinaten gegeben sind. Für die Koordinaten ($\lambda_0 = +1{,}07^\circ$, $\varphi_0 = 52{,}38^\circ$) sind am günstigsten gelegen die folgenden „regions".

Nr. bei R. u. Th.	λ	φ	i_0	l	p
III	$+2{,}433^0$	$53{,}445^0$	$69{,}050^0$	$+0{,}118$	$+0{,}602$
IV	$+0{,}290^0$	$51{,}795^0$	$67{,}760^0$	$+0{,}127$	$+0{,}647$
VII	$+3{,}160^0$	$51{,}135^0$	$67{,}687^0$	$+0{,}142$	$+0{,}645$

Das Prinzip der linearen Interpolation verlangt nun, daß man drei Zahlen α, β und γ so bestimme, daß

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$
$$2{,}433\,\alpha + 0{,}290\,\beta + 3{,}160\,\gamma = +1{,}07,$$
$$53{,}445\,\alpha + 51{,}795\,\beta + 51{,}135\,\gamma = 52{,}38,$$

ist. Dann ist nämlich für den Punkt ($\lambda = +1{,}07^0$, $\varphi = 52{,}38^0$)

$$i_0 = i_0^{III}\alpha + i_0^{IV}\beta + i_0^{VII}\gamma,$$
$$l = l^{III}\alpha + l^{IV}\beta + l^{VII}\gamma,$$
$$p = p^{III}\alpha + p^{IV}\beta + p^{VII}\gamma,$$

Die Auflösung der Gleichungen für α, β, γ ergab:

$$\alpha = +0{,}3564, \quad \beta = +0{,}6380, \quad \gamma = +0{,}0056\ ^{1)},$$

und daraus

$$\lambda_0 = +\ 1{,}07^\circ, \quad i_0 = 68{,}219^\circ,$$
$$\varphi = 52{,}38^\circ, \quad l = +0{,}1238,$$
$$p = +0{,}6518,$$

Die Formel, welche die Lage der Isoklinen bestimmt, lautet daher

IV. $$i = 68{,}219^\circ + 0{,}1238\,(l - 1{,}07^\circ) + 0{,}6518\,(\varphi - 52{,}38^\circ)$$
(gültig für 1886,0).

Nach Ableitung der Formeln mögen nun die erhaltenen Konstanten in folgender Tafel zusammengestellt werden.

Nr.	Zeit	i_0 beob.	i_0 ber.	1000. Δi_0	l beob.	l ber.	10000. Δl	p beob.	p ber.	10000. Δp
I.	1720,5	75,854	75,855	− 1	− 0,2444	− 0,2428	− 16	+ 1,0338	+ 1,0329	+ 9
II.	1837,0	69,894	75,890	+ 4	+ 0,1852	+ 0,1768	+ 84	+ 0,5234	+ 0,5369	− 135
III.	1860,0	68,919	68,926	− 7	+ 0,1556	+ 0,1690	− 134	+ 0,5907	+ 0,5692	+ 215
IV.	1886,0	68,219	68,216	+ 3	+ 0,1238	+ 0,1174	+ 64	+ 0,6518	+ 0,6610	− 92

In derselben sind außer der Nummer und der Zeit unter den Rubriken i_0 beob., l beob., p beob., die aus den Beobachtungen direkt folgenden Werte von i_0, l und p aufgeführt. Die auf jede dieser Spalten folgende giebt unter der Bezeichnung i_0 ber., l ber., p ber. die nach unten entwickelten Formeln berechneten Ergebnisse. Unter $1000\,\Delta i_0$, $10\,000\,\Delta l$, $10\,000\,\Delta p$ sind die mit 1000 bez. 10 000 multiplizierten Unterschiede (Beob—Rech) angesetzt.

In meiner Inaug.-Dissertation[2]) habe ich für die magnetische Deklination eine säkulare Periode von 476,92 Jahren nachgewiesen. Es zeigen nun auch die Inklinationen für London, die ich in einer besonderen Arbeit demnächst zu behandeln gedenke, die gleiche Periode mit großer Deutlichkeit. Es liegt daher nahe, die i_0, l, p aufzufassen als periodische Funktionen erster Ordnung von der Periodenlänge 476,92 Jahr.

Bezeichnen wir mit J die Jahreszahl und setzen

$$\tau = \frac{360^\circ\,(J - 1800{,}0)}{476{,}92},$$

so haben wir folgende Formeln

1) Am günstigsten wählt man drei Punkte (regions) so, daß möglichst nahe

$$\alpha = \beta = \gamma = \tfrac{1}{3}.$$

Die oben angeführten Punkte (regions) entsprechen dieser Bedingung bei weitem nicht, es sind aber unter den vorhandenen die günstigsten.

2) Die längste nachweisbare Periode der Erdmagnetischen Elemente, Teil I, Deklination Göttingen, 1892.

$$i_0 = i_{00} + i_{01}\cos\tau + i_{02}\sin\tau$$
$$l = l_0 + l_1\cos\tau + l_2\sin\tau$$
$$p = p_0 + p_1\cos\tau + p_2\sin\tau.$$

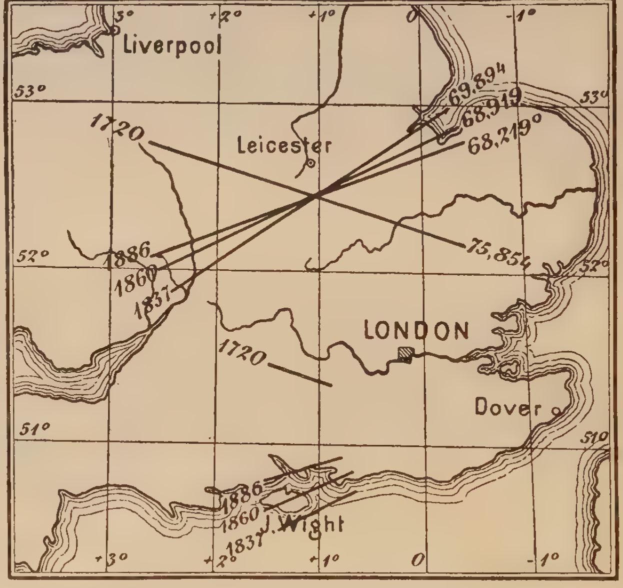
Die Konstanten i_{00}, i_{01}, i_{02}; l_0, l_1, l_2; p_0, p_1, p_2 habe ich nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und dafür gefunden:

$$i_0 = 72{,}344^0 - 0{,}481\cos\tau - 4{,}332\sin\tau$$
$$= 72{,}344^0 - 4{,}3590\sin(J - 1791{,}60)\cdot\frac{360^0}{476{,}92},$$

$$l = -0{,}2223 + 0{,}3362\cos\tau + 0{,}2178\sin\tau$$
$$= -0{,}2223 + 0{,}4005\cos(J - 1843{,}63)\cdot\frac{360^0}{476{,}92},$$

$$p = +1{,}0776 - 0{,}4859\cos\tau - 0{,}2309\sin\tau$$
$$= +1{,}0776 - 0{,}5413\cos(J - 1833{,}46)\cdot\frac{360^0}{476{,}92}.$$

Die nach diesen Formeln berechneten Werte für die Beobachtungszeiten sind oben in der letzten Tabelle angeführt.



Graphisch ist die säkulare Variation der Inklination auf nebenstehender Skizze dargestellt. Es sind die durch den Mittelpunkt ($\lambda = 1{,}07^0$, $\varphi = 52{,}38^0$) gehenden Isoklinen für die Jahre, in welchen Beobachtungen benutzt wurden, gezeichnet, ebenso sind die Isoklinen für die um 1^0 kleineren Werte der Inklination durch kurze Striche angedeutet. Die Jahreszahl ist jeder Isokline beigeschrieben.

In dem Buche „The Longitude Found“ giebt Bond 1676 zahlreiche Werte für die Inklination, sowohl in anderen Weltgegenden als auch besonders in Großbritannien an. Schon daß dieselben sämmtlich für das Jahr 1676 gelten sollen, erregt Mißtrauen, ebenso die oft ungewisse Angabe des Ortes: „Mitte von Japan“ etc. Der größte Teil dieser Zahlen ist sicher nicht direkt beobachtet, und deshalb sind sie zur Berechnung der Isoklinen in England nicht geeignet.

Ueber den Gefrierpunkt verdünnter Lösungen.

Von

W. Nernst und R. Abegg.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Mai 1894 von E. Riecke.

Die bisherigen Bestimmungen des Gefrierpunktes verdünnter wässeriger Lösungen, z. B. der von einer Reihe Forscher untersuchten Rohrzuckerlösungen, zeigen verhältnismäßig große Differenzen, die auch in den neuerdings von Jones[1]) und Loomis[2]) veröffentlichten Zahlen nicht fehlen. Es war dies um so auffälliger, als bei diesen beiden Untersuchungen die Genauigkeit der Temperaturbestimmung erheblich weiter als bisher getrieben worden war (bis auf wenige $^1/_{10000}$ Grade), und es mußte daher mit F. Kohlrausch[3]) geschlossen werden, daß noch irgendwo unbekannte Fehlerquellen vorhanden sind.

Da es sich hier um eine für die neuere Lösungstheorie grundlegende Frage handelt, so beansprucht das Problem zuverlässiger Gefrierpunktsbestimmungen nicht unbedeutendes Interesse. Im Folgenden sei dargelegt, inwieweit wir uns diesem Ziele genähert haben. Es soll zuerst auf einige Punkte betreffs der Theorie des Gefrierens von Lösungen hingewiesen werden, deren Nichtbeachtung die Mangelhaftigkeit vieler bisheriger Messungen erklären dürfte; hierauf folgen die Ergebnisse unserer eigenen Versuche und in einem dritten Abschnitt eine Besprechung der in den älteren Messungen vorhandenen Fehlerquellen.

Der von uns benutzte Gefrierapparat diente ursprünglich dem einen von uns (A.), um mit Hülfe eines Eisen-Neusilberthermoelements und eines Thomsonschen Galvanometers Gefrierpunktsbestimmungen zu machen, bei denen die Temperaturdifferenzen

---

1) Zeitschr. physik. Chem. 11 529 und 12 623 (1893).
2) Wied. Ann. 51 500 (1894).
3) Ibid. S. 524.

sich ohne Mühe auf 0°0001 beobachten ließen. Doch zeigten die erhaltenen Zahlen gewisse Unregelmäßigkeiten, die die Versuchsfehler beträchtlich überstiegen. Die daraufhin durch den andern von uns (N.) entwickelte Theorie (folgender Abschnitt) des Gefrierphänomens veranlaßte uns dann zur Ausführung der unten beschriebenen Versuche.

Theoretisches über die Einstellung des Gleichgewichtes beim Gefrieren.

Gegeben sei eine sehr große Menge einer gefrierenden Flüssigkeit; der wahre Gefrierpunkt, d. h. diejenige Temperatur, bei der der abgesonderte feste Bestandteil und die zurückbleibende Flüssigkeit mit einander im Gleichgewichte sind, sei T_0, die Temperatur zur Zeit z sei t. Dann wird sich t in dem Sinne ändern, daß es sich T_0 nähert, indem entweder festes Lösungsmittel schmilzt oder ausfriert und die damit verbundene Absorption oder Entwicklung von Wärme die Temperatur der Flüssigkeit erniedrigt oder erhöht, je nachdem t über oder unter T_0 liegt. Eine Beeinflussung der Außentemperatur ist ausgeschlossen, da wir eine sehr große Menge Flüssigkeit voraussetzten.

Nach den bisherigen Erfahrungen über die Auflösung fester Körper[1]), insbesondere nach den Untersuchungen von Boguski[2]), können wir die Lösungsgeschwindigkeit des festen Lösungsmittels unter sonst gleichen Umständen der Entfernung vom Gleichgewichtspunkte proportional annehmen, d. h. da die absorbierte Wärmemenge der gelösten Menge proportional ist, so können wir die Temperaturänderung in jedem Augenblicke der Entfernung von der wahren Gefriertemperatur proportional setzen. Somit wird

$$dt = K(T_0 - t)\,dz. \tag{1}$$

Die Bedeutung der Größe K brauchen wir hier nicht zu untersuchen, bemerkt sei nur, daß sie der Gesamtoberfläche des festen Lösungsmittels und seiner Schmelzwärme direkt proportional ist. Das Integral liefert die zu den Zeiten z_1 und z_2 gehörigen Temperaturen t_1 und t_2

$$K(z_2 - z_1) = \log\text{nat}\,\frac{T_0 - t_1}{T_0 - t_2}. \tag{2}$$

In Wirklichkeit wird wegen der begrenzten Dimensionen der Lösungsmasse in Folge von Strahlung u. dgl. ein Wärme-Austausch mit der Umgebung stattfinden. Bezeichnen wir mit t_0 diejenige

1) Vgl. Nernst, Theoret. Chemie S. 456 (1893).
2) Berl. Ber. 9 1646 (1876).

Temperatur, der die Lösung zustreben würde, wenn kein Gefrieren stattfände (wir wollen sie im Folgenden als „Konvergenztemperatur“ bezeichnen), so ergiebt sich der Gang der Temperatur in dem Falle, daß keine Ausscheidung von festem Lösungsmittel sich vollzieht, aus der bekannten Gleichung von Newton

$$dt = k(t_0 - t)\,dz; \tag{3}$$

das Integral liefert

$$k(z_2 - z_1) = \log\text{nat}\,\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2}. \tag{4}$$

Auch um die physikalische Bedeutung von k brauchen wir uns nicht zu kümmern, bemerkt sei nur, daß diese Größe um so kleiner wird, je größer das Verhältnis von Wärmekapacität der Lösungsmasse zur Oberfläche ist.

Der wirkliche Gang der Temperatur beim Gefrieren einer begrenzten Menge Lösung ergiebt sich durch Superposition von (1) und (3), d. h. es wird

$$dt = (K(T_0 - t) + k(t_0 - t))\,dz \tag{5}$$

und das Integral liefert

$$(K + k)(z_2 - z_1) = \log\text{nat}\,\frac{KT_0 + kt_0 - (K+k)\,t_1}{KT_0 + kt_0 - (K+k)\,t_2}. \tag{6}$$

Die Endtemperatur t', die wir passend als die scheinbare Gefriertemperatur der Flüssigkeit bezeichnen können, ergiebt sich aus

$$\frac{dt}{dz} = K(T_0 - t') + k(t_0 - t') = 0$$

zu

$$t' = T_0 - \frac{k}{K}(t' - t_0) \tag{7}$$

Die feste Einstellung des Thermometers liegt also nicht bei T_0, sondern bei der mehr oder weniger davon verschiedenen Temperatur t'; letztere nähert sich umsomehr der ersteren, je weniger die Konvergenztemperatur t_0 von der wahren Gefriertemperatur T_0 verschieden ist und je größer K im Verhältnisse zu k ist; ein Zusammenfallen der scheinbaren mit der wahren Gefriertemperatur findet also nur statt, wenn entweder

$$t_0 = T_0$$

oder

$$K = \infty$$

ist. Da erstere Bedingung bisher wohl nie streng eingehalten

wurde, so war bei früheren Versuchen stillschweigende Voraussetzung, daß sich das Gleichgewicht zwischen festem und flüssigem Lösungsmittel mit unendlicher Geschwindigkeit einstelle. Diese Voraussetzung wird sich aber weiter unten in einigen Fällen als unstatthaft ergeben.

Es sei ausdrücklich betont, daß es sehr wohl möglich oder sogar wahrscheinlich ist, daß die Gleichungen (1) und (3) nur annähernd gelten; allein es ist wohl ausgeschlossen, daß sie mit einer für unsere Zwecke in Betracht kommenden Ungenauigkeit behaftet sind. Es sei ferner noch darauf hingewiesen, daß auch durch das Rühren Wärme entwickelt wird, und zwar sind die hierdurch verursachten Temperaturänderungen keineswegs überaus klein. Allein, wenn nur konstant gerührt wird, so besteht der einzige Effekt offenbar in einer Verschiebung der Konvergenztemperatur und wird daher gleichzeitig mit dieser in Rechnung gebracht, wenn letztere nur bei gleicher Rührungsgeschwindigkeit bestimmt wird.

Die Versuchsanordnung.

Als „Gefriergefäß“ dient ein Becherglas, welches durch 100 cm³ Flüssigkeit zu etwa ²/₃ angefüllt wird. Es wird mit Hilfe eines Korkringes in den Gefriermantel, einen starkwandigen etwa 10 cm hohen Glascylinder derart eingesetzt, daß es allseitig durch eine ca. 1 cm dicke Luftschicht von diesem getrennt ist. Den Gefriermantel verschließt mittelst einer Verschraubung eine dicht aufgeschliffene Glasplatte mit 3 Durchbohrungen. Die mittelste, größte erlaubt ein gewöhnliches Beckmann'sches Thermometer mit Hülfe eines Stückes Kautschuckschlauch dicht einzusetzen, so daß seine Kugel in die Mitte der Flüssigkeit im Gefriergefäß hineinreicht. In die andern beiden Durchbohrungen sind Glasröhren dicht eingekittet, deren eine dem Rührer zur Führung dient, während die andere zum Einpipettieren der Lösungen bestimmt ist. Der Rührer ist ein den Querschnitt des Gefriergefäßes annähernd ausfüllendes rundes Messingblech mit einem konzentrischen runden Ausschnitt für die Thermometerkugel. Vier bis nahe an die Peripherie des Ausschnitts reichende radiale Schnitte teilen das Blatt des Rührers in 4 Quadranten, deren aneinanderstoßende abwechselnd auf- und abwärtsgebogene Kanten dem Blatt etwa das Aussehen eines Schiffspropellers geben. Ein nahe der äußeren Peripherie angelötetes Stück dicken Kupferdrahts ist seinerseits in eine Glasröhre gekittet[1]), die durch

1) um nicht durch einen Metallstiel der Wärmeleitung Vorschub zu leisten.

eine der oben erwähnten Röhren des Deckels führend den Stiel des Rührers bildet. Eine oben eingekittete Metallöse erlaubt die Verbindung mit dem mechanischen Rührwerk herzustellen. Die Metallteile des Rührers sind durch eine Schicht Asphaltlack vor der Einwirkung der Flüssigkeit geschützt.

Das Rührwerk besteht im wesentlichen aus einer Schnurscheibe, die durch die Uebertragung einer kleinen Wasserturbine in Drehung versetzt wird. Eine einfache Excentervorrichtung verwandelt die Drehung in eine Auf- und Abwärtsbewegung, deren Amplitude so gewählt wird, daß das Blatt des Rührers stets in der Flüssigkeit bleibt.

Zur Ausführung unserer Versuche kamen zwei möglichst gleiche obiger Beschreibung entsprechende Gefrierapparate zur Verwendung und zwar folgendermaßen:

In einer geräumigen Glaswanne von etwa 20 cm Wandhöhe wurden die beiden Gefriermäntel (mit Verschraubungsvorrichtung) bis dicht an ihren oberen Rand nebeneinander in eine innige Mischung von Eis und pulv. Kalialaun eingebettet, einem Kryohydrat, welches in bequemster Weise die Temperatur von $-0^{0}47$ beliebig lange konstant zu halten ermöglicht.

Die beiden „Gefriergefäße“, mit je 100 cm^{3} Wasser beschickt, wurden unter stetem Rühren in einer Kältemischung von ca. -3^{0} C. auf $-1^{0}2$ bis $1^{0}3$ überkühlt, worauf spontan eine feine Eisausscheidung eintrat. Mit dieser und den Rührern wurden nun die Gefriergefäße schnell in ihre Gefriermäntel eingestellt, die Deckel mit den Thermometern aufgesetzt und verschraubt und dann über beide Gefrierapparate bis etwa an das obere Ende der Deckelröhren die Wanne mit dem Eis-Kalialaunkryohydrat angefüllt, so daß die Wärmeeinstrahlung auf die kleine Oeffnung der Einpipettierrohre beschränkt war.

Vermittelst der Oesen wurden nun die Rührer an dem Rührwerk befestigt und dieses in mäßige Bewegung gesetzt. Einige Minuten nach beendigter Eingrabung der Apparate in das Kryohydrat zeigten beide Thermometer keine Schwankungen mehr. Die Ablesung der Thermometer geschah mit einem etwa 1 m entfernten Fernrohr. Sie waren so eingestellt, daß die Enden ihrer Quecksilberfaden in ungefähr gleicher Höhe standen, somit das Fernrohr nur horizontal zu verschieben war, um Parallaxenänderung zu vermeiden. Die Vergrößerung war ausreichend, um $^{1}/_{10}$ Teilstriche der Scala = $0^{0}001$ mit Sicherheit zu schätzen.

Die Bereitung der Lösungen geschah bei zusammengesetztem Apparate so, daß aus einer Pipette von bekannter Größe (1—2 cm^{3})

von einer bekannten konzentrierteren Lösung durch das Deckelrohr zugesetzt wurde. Zur Kontrolle wurde in einem Falle (NaCl) die schließliche Lösung analysirt.

Es zeigte sich von entscheidender Wichtigkeit, die Lösungen in möglichst stark unterkühltem Zustande einzupipettieren, wozu raschestes Arbeiten erforderlich ist. Andernfalls verzehrt das Zupipettieren binnen kurzem den Eisvorrat, der schon an sich beansprucht wird, wenn, wie bei fast allen unsern Versuchen, die Konvergenztemperatur über dem Gefrierpunkt liegt.

Von den folgenden Versuchsreihen wurde die II. NaCl allein in anderer Weise wie eben beschrieben ausgeführt. Hier wurden die Gefriergefäße vom Anfang mit 100 cm^3 der konzentriertesten der untersuchten Lösungen beschickt, in dieser wie oben durch Ueberkältung die Eisausscheidung hervorgerufen und der Apparat zusammengesetzt. Die übrigen Konzentrationen wurden durch Verdünnen hergestellt, indem mit einer 50 cm^3 Pipette geeigneter Form 50 cm^3 herausgehoben und mit einer gleichen 50 cm^3 überkühltes Wasser hineingebracht wurden. Dies Verfahren erwies sich jedoch sowohl als unbequemer, wie ungenauer und wurde deshalb wieder verlassen.

Die beiden benutzten Thermometer wurden während der ganzen Versuchsperiode auf 0^0 erhalten.

Die gleichzeitige doppelte Durchführung jeder Versuchsreihe in den beiden Gefrierapparaten bot außer dem Vorteil der größeren Genauigkeit vor allem noch die Sicherheit, von den mannigfachen unerwarteten und auf den ersten Blick unwahrscheinlichen Beobachtungen nicht auf zufällige Eigentümlichkeiten der Thermometer, sondern auf reelle Ursachen zu schließen.

Die Konstanten unserer Apparate, die zur Berechnung der etwaigen Korrektionen erforderlich sind, wurden in folgender Weise bestimmt. Die Apparate wurden mit Wasser von Zimmertemperatur beschickt und die Abkühlung messend verfolgt, während im Uebrigen genau die Versuchsbedingungen, wie bei den Gefrierpunktsbestimmungen, eingehalten wurden (Kryohydrat als Bad, gleiche Rührgeschwindigkeit). Dabei ergiebt sich gleichzeitig sowohl die Konvergenztemperatur t_0, wie die Newton'sche Konstante k. Wir fanden so als Mittel der für beide Apparate sehr nahe gleichen Zahlen

$$t_0 = +0{,}155^0; \qquad k = 0{,}0180 \text{ Min.}^{-1}.$$

Die letztere Zahl besagt also, daß die Abkühlung pro Minute

0,0180° beträgt, wenn die Temperatur des Apparates 1° über der Konvergenztemperatur liegt.

Es war uns anfänglich überraschend, daß die Konvergenztemperatur etwa 0,6° über der Temperatur des Kryohydrats lag, trotzdem die Gefäße vollständig darin eingebettet waren und ein Einfluß der Zimmertemperatur daher so gut wie völlig eliminirt war. Es stellte sich nun bald heraus, daß die durch das Rühren entwickelte Wärme großenteils diese Verschiebung nach oben veranlaßt. Die Rührgeschwindigkeit betrug 30 Umdrehungen pro Minute, also alle zwei Sekunden einen Hub. Als sie auf eine Umdrehung pro Minute reduziert wurde, sank die Konvergenztemperatur auf −0,28°.

Zunächst wurde die Geschwindigkeit, mit der sich das Gleichgewicht zwischen Eis und reinem Wasser (unter den oben angegebenen Versuchsbedingungen) herstellt, zu messen gesucht. Dabei ergeben sich Werte für K von etwa 7 bis 12; dieselben hängen natürlich in hohem Maaße von der ausgeschiedenen Eismenge ab. Die hier an dem beobachteten Gefrierpunkt anzubringende Korrektion würde sich also zu etwa

$$0{,}155 \frac{0{,}0180}{10} = 0{,}0003$$

berechnen, also für uns nicht in Betracht kommen. Uebrigens sei noch bemerkt, daß Berücksichtigung der Trägheit des Thermometers gegenüber Temperaturänderungen der Flüssigkeit obigen Wert von K noch erheblich vergrößert; die Geschwindigkeitskonstante der Thermometer betrug (in analoger Weise bestimmt und berechnet) etwa 23 [1]), so daß die obigen Werte von K wegen der Thermometerträgheit noch ungefähr zu verdoppeln sind, die Korrektion somit noch auf den halben Betrag sinkt.

Die Thatsache, daß das Gleichgewicht zwischen Eis und Wasser sich so überaus schnell herstellt, kontrollirten wir noch in der Weise, daß wir den Gefrierpunkt in einem Bade von +10° bestimmten. Hier würde sich die Korrektion zu

$$10 \frac{0{,}0180}{20} = 0{,}009^0$$

schätzen lassen; thatsächlich beobachteten wir hier Verschiebungen

1) Die physikalische Bedeutung dieser Zahl ist einfach die, daß das Thermometer pro Minute um 23° stiege, wenn die Umgebung konstant um 1° unter der vom Thermometer angezeigten Temperatur erhalten würde.

der Gefriertemperatur von 5 bis 15 Tausendstel Graden nach oben, je nach der Menge des ausgeschiedenen Eises. So konnten wir also auf einem zweiten unabhängigen Wege die große Einstellungsgeschwindigkeit der Gefriertemperatur des reinen Wassers nachweisen.

Chlornatrium. Wir untersuchten zunächst Chlornatrium, weil hier eine gute Uebereinstimmung zwischen den Werten von Jones und Loomis vorliegt. Auch bei diesen Versuchen stellte sich der (scheinbare) Gefrierpunkt t' sehr schnell ein; in 0,5 Minuten wurde letzterer bis auf weniger als 0,001° erreicht und es folgt für K als untere Grenze ca. 5. Die Korrektion kann bei den verdünntesten Lösungen höchstens

$$0{,}18 \frac{0{,}0180}{5} = 0{,}0006^0$$

betragen, dürfte jedoch in Wirklichkeit sehr viel kleiner sein und kann von uns vernachlässigt werden.

Natriumchlorid.

I.

t	$m (= m')$	t/m	J	L
0°.0295	0.008275	3.57	3.63	3.67
.0600	.01642	3.65	3.60	3.60
.1160	.03234	3.59	3.54	3.56
.2207	.0627	3.52	3.50	3.53.

Unter t ist die beobachtete Gefrierpunktsdepression (stets das Mittel aus den Angaben der beiden bis auf 1 bis 2 Tausendstel Grade übereinstimmenden Apparate), unter m die Anzahl g-Mol. pro 1000 g. Wasser und unter m' der Normalgehalt (g-Mol. pro Liter) verstanden; t/m bez. t/m' bedeuten also die molekularen Gefrierpunktserniedrigen. Unsere Bestimmungen reihen sich den von Jones und Loomis erhaltenen und in der vierten und fünften Kolumne verzeichneten molekularen Gefrierpunktserniedrigungen ausgezeichnet ein.

Die zweite Versuchsserie, die in der oben beschriebenen, etwas abweichenden Weise ausgeführt wurde, ergab

II.

t	$m (= m')$	t/m
0°.015	0.0039	3.85
.060	.0156	3.85
.1135	.0312	3.64
.222	.0624	3.56.

Alkohol. Für die Einstellungsgeschwindigkeit gilt hier dasselbe wie beim Chlornatrium; eine Korrektion an den beobachteten Gefrierpunktserniedrigungen war also nicht anzubringen.

Aethylalkohol.

t	m	t/m	m'	t/m'	J	L
0°.0365	0.0185	1.97	0.0185	1.97	2.1	1.75
.0685	.0364	1.88	.0364	1.88	2.1	1.79
.1307	.0705	1.85	.0703	1.86	2.0	1.80
.2432	.1324	1.84	.1316	1.85	1.9	1.82.

Rohrzucker. Die Einstellungen bei Rohrzucker waren ebenso sicher und die Uebereinstimmung zwischen den Angaben der beiden Apparate ebenso vollkommen wie bei den beiden früher untersuchten Substanzen; allein die Geschwindigkeit, mit der nach dem Einpipettiren der Lösung der Gleichgewichtszustand sich einstellte, war viel geringer. Wir geben zunächst den Mittelwert aus den beiden direkten Beobachtungen:

Rohrzucker.

t	m	t/m
0°.0277	0.0179	1.55
.0612	.0353	1.73
.1222	.0688	1.78
.2410	.1305	1.85.

Für die Einstellungsgeschwindigkeit K ergeben sich für die verdünnteste Zuckerlösung folgende Zahlen:

	I	II	III	
$t =$	3,928	3,926	3,925	3,9225
$z =$	0	1	1,5	∞

Die Zeit (Minuten) ist bald nach dem Einpipettiren gezählt, nachdem angenommen werden konnte, daß durch das Umrühren völlige Vermischung erzielt war. Die schließliche Einstellung war 3,9225. Man findet also für K aus

$$\text{I u. II} \quad K = \text{log. nat.} \frac{0,0055}{0,0035} = 0,46$$

$$\text{II u. III} \quad K = 2 \text{ log. nat.} \frac{0,0035}{0,0025} = 0,64.$$

Mit Hülfe des Mittelwertes 0,55 finden wir für die Korrektion

$$\text{Corr.} = (0{,}155 + 0{,}027)\frac{0{,}0180}{0{,}55} = 0{,}0059^0$$

und zwar ist letzterer Wert zu addieren, weil die Konvergenztemperatur oberhalb t' liegt. In gleicher Weise sind für die andern untersuchten Lösungen die Korrektionen berechnet:

Rohrzucker.

t	K	Corr.	$t_{corr.}$	m	$t_{corr.}/m$	m'	$t_{corr.}/m'$
0°.0277	0.55	+0°.0059	0°.0336	0.0179	1.87	0.01785	1.87
.0612	1.5	22	.0634	.03534	1.79	.03505	1.81
.1222	1.7	25	.1247	.0688	1.81	.06776	1.84
.2410	1.8	40	.2450	.1305	1.88	.1269	1.93.

Die korrigirten Gefrierpunktserniedrigungen dürften bis auf 1 — 2 Tausendstel Grad sicher sein; bis zum gleichen Grade der Genauigkeit liefern sie bis zu den größten Verdünnungen konstante und auf den Wert 1,86 stimmende molekulare Gefrierpunktserniedrigungen (vgl. 6. Kolumne)[1]).

Zur weiteren Prüfung der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie war es erwünscht, eine Beobachtungsreihe durchzuführen, bei der die Konvergenztemperatur unterhalb der Gefriertemperatur liegt; hier waren demgemäß zu große Erniedrigungen zu erwarten, während sie korrigirt natürlich die gleichen Zahlen wie oben geben sollten. Zu diesem Zwecke wandten wir als umgebende Kältemischung das Kryohydrat des Salpeters an, dessen Temperatur ca. — 2,7° beträgt. Die Rührgeschwindigkeit betrug 50 Umdrehungen, wodurch die Konvergenztemperatur (wie durch besondern Versuch festgestellt) auf — 1,5° erhöht wurde. Eine hinreichend genaue Bestimmung von K wurde dadurch ermöglicht, daß die Zeiten in jedem Augenblick notirt wurden, in welchem nach dem Einpipettiren der Lösung der sinkende Quecksilberfaden des Thermometers die (Centigraden entsprechenden) Theilstriche passierte. Man fand z. B.

Zeit	0	0,082	0,217	∞	Minuten
Ablesung	4,64	4,63	4,62	4,610	Grade

durch Kombination von 1 und 2 berechnet sich K zu 4,9, von 2

1) Die Korrektion wegen der durch Eisabscheidung bedingten Konzentrationszunahme kann bei den bisher beschriebenen Versuchen nicht in Betracht kommen (vgl. S. 6).

und 3 zu 5,1; eine Reihe ähnlicher Messungen bestätigt ebenfalls die Gültigkeit der logarithmischen Formel für die Einstellung auf die Gefriertemperatur. Die Werte für K sind durch die schnellere Rührung stark vergrößert. Da die beiden Apparate nicht unmerklich verschiedene Zahlen gaben, so seien die erhaltenen Resultate gesondert mitgetheilt:

I

t	K	Corr.	$t_{corr.}$	m	$t_{corr.}/m$
0,035	7	– 0,004	0,031	0,0179	1,73
0,072	5	5	0,067	0,0353	1,90
0,133	5	5	0,128	0,0688	1,86

II.

t	K	Corr.	$t_{corr.}$	m	$t_{corr.}/m$
0,037	7	– 0,004	0,033	0,0179	1,84
0,070	6	4	0,066	0,0353	1,87
0,139	3	8	0,131	0,0688	1,90.

In der That fallen in obiger Tabelle die unkorrigirten molekularen Gefrierpunktserniedrigungen beträchtlich zu hoch aus (bis zu 2,1) die korrigirten aber liefern ziemlich innerhalb der Fehlergrenzen wieder den früheren Wert 1,86. Die Zahlen sind bei der kleinsten Konzentration natürlich am unsichersten; wenn sich bei den beiden höheren Konzentrationen etwas zu große Erniedrigungen ergeben haben, so dürfte daran der Umstand schuld sein, daß im Gegensatz zu den früheren Versuchen hier infolge der niedrigen Außentemperatur bei Schluß des Versuchs die vorhandene Eismenge nicht zu vernachlässigen war; wir schätzen hier die Korrektion auf ca. 2 Prozent.

Nach Schluß des letzten Versuchs ersetzten wir das Kryohydrat durch Wasser von etwa $+5^0$; alsbald stieg die scheinbare Gefriertemperatur bei dem Apparat I um 0,014, bei II um 0,027, während sich aus 5 k/K für I 0,018, für II 0,03 berechnet. Bei der Unsicherheit, mit der hier infolge baldiger Erschöpfung des Eisvorrats die Messung der scheinbaren Gefriertemperatur verbunden war, ist die Uebereinstimmung mehr als genügend. Wir haben somit wohl den überaus großen Einfluß der Außentemperatur auf die unkorrigirte molekulare Gefrierpunktserniedrigung gerade der verdünnten Zuckerlösungen auf mannigfache Weise sicherstellen und in Rechnung setzen können.

Besprechung der Resultate.

Für den von uns untersuchten Elektrolyten NaCl stimmen unsere Ergebnisse, wie schon bemerkt, vollständig mit denen von Loomis und Jones überein; hier scheinen also wegen der Größe von K die Korrektionen überall zu verschwinden. Anders liegt die Sache beim Alkohol (S. 149) und beim Rohrzucker; hier sind die Zahlen von Jones sehr erheblich höher, diejenigen von Loomis nicht ganz unbeträchtlich niedriger als die unsrigen.

Die von uns beobachteten korrigirten Gefrierpunktserniedrigungen lassen sich sämtlich aus der Theorie befriedigend (bis auf 1 bis 2 Tausendstel Grade, d. h. bis auf die Beobachtungsfehler) berechnen, wenn wir für die molekulare Gefrierpunktserniedrigung den Werth 1,86 annehmen und beim Chlornatrium die Dissociation berücksichtigen. Die Konzentration ist dabei (nach Raoult) in g-Mol. pro 1000 g. Wasser zu zählen.

Die Uebereinstimmung wird beim Rohrzucker ungenügend, wenn man nach Arrhenius den Normalgehalt als Konzentration einführt; bei den andern Stoffen geben beide Berechnungsarten nur unwesentlich verschiedene Resultate.

Es ist nicht ohne Interesse, die älteren Zahlen auf die Fehlerquellen zu prüfen, durch die sie theilweise so erheblich entstellt sind; es fanden z. B. für die molekulare Gefrierpunktserniedrigung (berechnet nach Raoult) von verdünnten (etwa 1%oen) Rohrzuckerlösungen:

Arrhenius[1])	Raoult[2])	Jones	Loomis
2,02	2,07	2,18	1,81

wir finden, wie bemerkt, 1,86 (unkorrigirt 1,6 bis 2,1). Arrhenius arbeitete mit dem gewöhnlichen Beckmann'schen Apparat und mit recht energischer Kältemischung; dies erklärt, daß seine Zahl beträchtlich zu groß ist. Raoult giebt ausführlichere Angaben, aus denen zu schließen, daß er das Kühlbad etwa 3° unterhalb des Erstarrungspunktes der Lösung hielt; dieser Forscher scheint die wesentliche Bedeutung des Kühlbades wohl beachtet zu haben; denn er sagt (l. c. S. 344) „Ist der Einfluß des Kühlbades auf die Temperatur der Flüssigkeit im Augenblick des Erstarrens nicht gleich null, so ist er doch bei den zu vergleichenden Versuchen derselbe und verschwindet aus den

1) Berl. Ber. 24 2255 (1891).
2) Zeitschr. physik. Chem. 9 343 (1892).

Differenzen, sodaß die Erniedrigungen des Erstarrungspunktes davon nicht beeinflußt werden".

Die Voraussetzung, die Raoult hier macht, ist mit der Annahme identisch, daß K für reines Wasser und für Lösungen gleiche Werte besitzt, was jedoch gerade für Rohrzucker nach unsern Erfahrungen entschieden nicht zutrifft. Seine Werte mußten so ebenfalls beträchtlich zu hoch ausfallen. Noch bedeutend fehlerhafter sind die Werte von Jones, der eine Kältemischung von Eis und Kochsalz, also eine ungemein starke Kühlung verwandte. Hätte Jones nur ein einziges Mal bei Rohrzucker eine andere Kältemischung oder selbst nur ein Gefriergefäß von anderen Dimensionen angewendet, so würde er bei der großen Genauigkeit, mit der er seine scheinbaren Gefrierpunkte ablas, wohl auf den Einfluß dieser Faktoren aufmerksam geworden und von der Veröffentlichung seiner wesentlich zufälligen Zahlen abgehalten worden sein.

Mit Vorsicht hat zweifellos Loomis gearbeitet, dessen Zahlen den unsrigen am nächsten kommen. Seine Kältemischung wählte er stets 0,3° unterhalb des Gefrierpunktes der Lösung; allein sein energisches Umrühren, sowie der Umstand, daß sein Gefriergefäß nach oben hin nicht durch die Kältemischung geschützt war, haben zweifellos die Konvergenztemperatur seines Apparats über Null gebracht. Daraus erklärt sich, daß Loomis im Gegensatz zu den andern Beobachtern zu niedrige Zahlen fand.

Die im Vorstehenden mitgetheilten Erwägungen und Erfahrungen werfen eine Reihe weiterer Fragen auf; der Umstand, daß die Gefriergeschwindigkeit offenbar im hohen Maaße von der Natur (Diffusionsfähigkeit?) der gelösten Substanz abhängt, darf wohl einige Aufmerksamkeit beanspruchen; es wird ferner zu untersuchen sein, inwieweit die bisherigen Gefrierpunktsbestimmungen, die mit andern als wässerigen Lösungen ausgeführt sind, für zuverlässig gelten können; vor allem aber scheint es in der That möglich zu sein, selbst an verdünnten Lösungen gute Messungen anzustellen und die Genauigkeit der Bestimmungen erheblich weiter zu steigern, als bisher möglich war.

Ueber die Selbstinduction und electrostatische Capacität von Widerstandsrollen und ihren Einfluß auf magnetische Erscheinungen.

Von

Carl Fromme.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 5. Mai 1894.

Die gebräuchliche bifilare Wickelung der Rollen in den Widerstandskästen hat zwar den Vortheil, daß der Coëfficient der Selbstinduction klein wird, sie vermag aber nicht zu hindern, daß bei den größeren Widerständen die Capacität so hohe Werthe erreicht, daß die Rollen, obwohl nahe oder ganz frei von Selbstinduction, dennoch in Stromkreisen mit rascher Aenderung der Stromintensität unbrauchbar sind. Das von Chaperon angegebene unifilare, jedoch bei jeder Windungslage in der Richtung alternirende Wickelungsverfahren soll dagegen sowohl die Selbstinduction als auch die Capacität auf sehr kleine Werthe herabdrücken. In der That haben sich bei den Versuchen von Chaperon, Elsas und F. Kohlrausch derartig gewickelte Rollen in Wechselstromkreisen noch dann verwendbar erwiesen, wenn bifilar gewickelte Rollen längst unbrauchbar waren.

Im Folgenden beschreibe ich eine Klasse von magnetischen Erscheinungen, welche von der Selbstinduction und electrostatischen Capacität der benutzten Widerstände in hohem Grade abhängen, und welche deßhalb neben dem rein magnetischen Interesse, das sie bieten, auch einen Werth besitzen für unsere Kenntniß der Eigenschaften von Drahtrollen.

Geprüft wurden die Widerstände eines Siemens'schen Rheostaten von in Summa 10000 S. E., nach Chaperon's Vorschrift gewickelte Rollen von 1000, 2000 und 3000 S. E., und Rollen von Wiedemann'schen Galvanometern, deren bifilar aufgelaufene Drähte entweder entgegengerichtet (ohne Selbstinduction O. S. J.) oder

gleichgewichtet (mit Selbstinduction M. S. J.) geschaltet wurden, oder von welchen man nur einen der beiden Drähte benutzte. Der zu prüfende Widerstand war als Parallelleitung zu dem (Platin-) Unterbrecher eines magnetisirenden Stromkreises geschaltet In der Magnetisirungsspirale befand sich meist ein Bündel, gewöhnlich von einander isolirter, dünner Eisendrähte. Drahtbündel zeigten nämlich die zu beschreibenden Erscheinungen am intensivsten, Stahlstäbe weniger, Eisenstäbe gar nicht. Der Eisenkörper wurde zunächst auf das bei der gebrauchten Stromstärke erreichbare Maximum des permanenten Magnetismus ($PM_{Max.}$) magnetisirt, indem langsam und continuirlich Flüssigkeitswiderstand in den Stromkreis eingeschaltet wurde bis zum völligen Verschwinden des Stroms. Dann wurde wieder der Strom, sei es der frühere oder ein schwächerer, hergestellt, und nun der Unterbrecher geöffnet, wodurch die Stromstärke plötzlich auf einen kleineren, bei der Größe des Widerstands der Parallelleitung meist schon sehr kleinen Werth fiel. Dieser Stromrest wurde durch langsame Zuschaltung von Flüssigkeitswiderstand auf Null reducirt, und das permanente Moment PM beobachtet, welches nun im Allgemeinen kleiner als $PM_{Max.}$ war, um $\delta . PM$ [1]).

Unterbricht man dagegen, ohne daß die Parallelleitung angeschlossen war, so findet man eine Abnahme des permanenten Moments gleich $\delta_1 . PM$, und man sollte erwarten, daß $\delta . PM < \delta_1 . PM$ wäre, um so mehr, je kleiner der Widerstand der Parallelleitung war. Denn einmal verschwindet bei Gebrauch der Parallelleitung nur ein Theil der magnetisirenden Kraft rasch, der Rest aber langsam und dieser ist desto größer, je kleineren Widerstand die Parallelleitung besitzt, und zweitens bieten sich dem Extrastrom zwei Wege des Ausgleichs, der eine durch die Funkenbahn, der andere geschlossene durch die Parallelleitung.

Ein derartig normales Verhalten ergab sich denn auch, wenn die Parallelleitung aus einem geradlinigen Flüssigkeitswiderstand oder aus einem kleinen oder einer Summe kleinerer Siemens'scher Rheostatenwiderstände zusammengesetzt war. Bildete dagegen der 5000er des Rheostaten die Parallelleitung, so war z. B. $\delta . PM = 121,8$ während $\delta_1 . PM$ nur $= 43,7$ war. Einen unter-

1) Daß das permanente Moment unter Umständen auch größer als $PM_{Max.}$ ausfallen kann, habe ich in Wied. Ann. 43 p. 181 1891 gezeigt. Bei der jetzigen Versuchsanordnung müssen aber, soll dies eintreten, weiter auch die Bedingungen erfüllt sein, daß die Parallelleitung keinen zu großen Widerstand besitze und frei von Selbstinduction und Capacität sei.

halb von $\delta_1 . PM$ liegenden Werth erhielt man aber, wenn der Widerstand 5000 aus der Summe 2000 + 1000 + 1000 + 500 + 200 + ... gebildet war, es ergab sich dann $\delta . PM = 29{,}3$. In gleicher Weise lieferte der 2000er des Rheostaten ein größeres $\delta . PM$, als die äquivalente Summe kleinerer Widerstände, und auch bei dem 1000er ließ sich noch ein kleiner Unterschied in der gleichen Richtung nachweisen.

Setzt man die Parallelleitung aus geradlinigen Flüssigkeits- oder kleineren Siemens'schen Widerständen (mit Ausschluß des 2000er und des 5000er) zusammen, so erhält man, die Widerstände als Abscissen, die $\delta . PM$ als Ordinaten genommen, eine zuerst rasch ansteigende, dann sich einer Parallelen zur Abscissenaxe asymptotisch nähernde sehr regelmäßige Curve. Gegenüber dieser Normalcurve ist $\delta . PM$ zu groß, wenn der 1000er, noch mehr, wenn der 2000er, und am meisten, wenn der 5000er die Parallelleitung bildet. Schaltet man aber z. B. zu dem 5000er noch den 2000er, oder auch nur einen im Vergleich kleinen Widerstand hinzu, so nähert sich das $\delta . PM$ der Normalcurve wieder an. So war bei $W = 5000$ (in einem Stück) $\delta . PM = 205$, bei $W = 5000 + 2000$ aber nur 117 und bei $W = 5000 + 500$ sank $\delta . PM$ auf 102.

Die Chaperon'schen Widerstände gaben dagegen sogar noch ein wenig unterhalb der Curve liegende $\delta . PM$. Es waren z. B., wenn die getheilten Siemens'schen Widerstände 2000, 3000 oder 5000 die Parallelleitung bildeten, die $\delta . PM = 13{,}0.\ 20{,}2.\ 33{,}7$. Dagegen erhielt man bei ungetheilten Chaperon'schen Widerständen 2000, 3000 und 2000 + 3000 = 5000 die kleineren $\delta . PM$ 12,2. 17,0. 23,7.

Eine Wiedemann'sche Rolle weicht am meisten vom normalen Verhalten ab, d. h. sie gibt im Vergleich zu ihrem Widerstand zu große $\delta . PM$, wenn ihre beiden Drähte gleichgerichtet, sie weicht weniger ab, wenn dieselben entgegengerichtet geschaltet sind. Ist ihr Widerstand klein, so verhält sie sich in der letzteren Schaltung natürlich normal. Sie gibt aber auch dann zu große $\delta . PM$, wenn man nur den einen ihrer Drähte als Parallelleitung benutzt. So erhielt man bei einer Rolle, welche 2×1890 Windungen und einen Widerstand von $W = 515$ S. E. hatte,

$\delta . PM = 375{,}2$, wenn die Rolle auf *M. S. J.* geschaltet war
$\delta . PM = 40{,}6$ " " " " *O. S. J.* " "
$\delta . PM = 48{,}4$, wenn nur ein Draht der Rolle benutzt wurde.

Dagegen erhielt man bei dem getheilten Rheostatenwiderstand $W = 515$ $\delta . PM = 39{,}6$ und bei $W = \frac{515}{2}$ ein $\delta . PM = 15{,}7$.

Es ist nun leicht einzusehen, daß Selbstinduction in der Parallelleitung den Werth von $\delta . PM$ vergrößern muß. Denn sie verzögert den Ablauf des Extrastroms, schwächt also dessen magnetisirende Wirkung. Vorzugsweise Selbstinduction besitzen die Wiedemann'schen Rollen aber dann, wenn nur einer ihrer Drähte benutzt wird. Werden beide Drähte eingeschaltet, und durchläuft sie der Strom in entgegengesetzter Richtung, so ist fast ausschließlich Capacität vorhanden. Diese wirkt zunächst im gleichen Sinne, wie Selbstinduction, den Ablauf des Extrastroms aufhaltend. Wahrscheinlich aber kehrt sich unter Umständen durch die condensatorischen Wirkungen die Electricitätsbewegung um, und es entstehen Oscillationen. Dadurch würde sich erklären, daß vielfach ein größerer Werth von $\delta . PM$ beobachtet wurde (z. B. bei $W = 5000$ des Siemens'schen Rheostaten), als wenn die Parallelleitung nicht angeschlossen war. Sind endlich die beiden Drähte einer Wiedemann'schen Rolle in gleicher Richtung geschaltet, so wirkt sowohl Selbstinduction als Capacität; daher kommen dann die zum Theil sehr bedeutenden Werthe von $\delta . PM$, welche die Größe von $\delta_1 . PM$ oft mehrfach übertreffen.

Je gleichmäßiger der Ablauf des Extrastroms gemacht wird, desto geringeren Einfluß wird die Selbstinduction und Capacität der Parallelleitung auf die Größe von $\delta . PM$ ausüben. Man umgab deßhalb das Bündel von einander isolirter Eisendrähte mit einem aufgeschlitzten Metallrohr oder noch besser, man füllte die Zwischenräume zwischen den Drähten mit einem leitenden Material aus. Im letzteren Fall wurde bei einem großen ungetheilten Siemens'schen Widerstand ein nur wenig größeres $\delta . PM$ gefunden, als bei einem Chaperon'schen, und bei einer Wiedemann'schen Rolle mit S. J. fast das gleiche $\delta . PM$ wie bei derselben Rolle ohne S. J. Daß bei einem Eisenstab der Einfluß von Selbstinduction und Capacität der Parallelleitung gleich Null war, ist wohl auch vorzugsweise aus dem gleichmäßigeren Ablauf des Extrastroms in Folge der Bildung inducirter Ströme in der Masse des Eisens zu erklären.

Ich habe früher (Wied. Ann. **45** p. 798. 1892) den Satz ausgesprochen, daß, wenn das permanente Moment eine Schwächung durch Stromunterbrechung erlitten hat, die Gruppirung der Molecularmagnete eine andere sein müsse, als wenn es einen gleich

großen Verlust durch einen dem magnetisirenden conträren Strom erfahren hatte. Dieser Satz wurde auf Grund von Versuchen aufgestellt, bei welchen man auf das geschwächte PM eine kleine Kraft wirken ließ. Die Größe des durch diese inducirten temporären und permanenten Moments ergab sich dann verschieden je nach der Art der Schwächung.

Bei den jetzigen Versuchen wurde immmer nur die Zunahme des permanenten Moments durch eine der vorigen gleich gerichtete kleine Kraft gemessen. Die Zunahme war stets kleiner — die Parallelleitung mochte beliebig zusammengesetzt sein —, als wenn ein gleich großer Verlust durch einen conträren Strom hervorgebracht war. Aber auch die Zusammensetzung und Beschaffenheit der Parallelleitung war durchaus nicht gleichgültig. Bei gleichem Verlust an permanentem Moment war die Zunahme durch die nachfolgende kleinere Kraft am größten, wenn die Parallelleitung aus einem inductions- und capacitätsfreien Widerstand, also aus einem geradlinigen Flüssigkeitswiderstand, einem Chaperon'schen oder einem kleinen oder einer Summe kleiner Siemens' scher Rheostatenwiderstände bestanden hatte. War die Leitung nicht inductions- und capacitätsfrei gewesen, so fiel die Zunahme kleiner aus, es befand sich also dann das permanente Moment in einem Zustand, welcher sich weniger leicht in den ursprünglichen (denjenigen des $PM_{Max.}$) zurückführen läßt.

Wenn die Parallelleitung aus einer auf große Selbstinduction geschalteten Rolle bestand, so fielen die Werthe von $\delta . PM$ nicht nur sehr groß, sondern bei Wiederholung des Versuchs auch sehr schwankend aus. Es wurde nun, nachdem der Unterbrecher geöffnet, die magnetisirende Kraft also auf einen Bruchtheil ihres anfänglichen Werths gesunken war, die nun vorhandene Magnetometerablenkung beobachtet und gefunden, daß das bei nun continuirlicher und langsamer Zuschaltung von Flüssigkeitswiderstand bis $W = \infty$ verschwindende Moment um so kleiner war, je kleiner sich schließlich auch das permanente Moment herausstellte, je größer also der Verlust $\delta . PM$ ausfiel. Als z. B. eine Wiedemann' sche Rolle, deren Windungszahl 2×1195 und deren Widerstand 184 S. E. war, auf „M. S. J." geschaltet, die Parallelleitung bildete, ergab sich das verschwindende Moment zu
65,2. 75,2. 76,0. 79,2. 111,2. 143,4, und der Verlust an permanentem Moment zu
111,8. 103,5. 102,2. 100,7. 83,4. 51,8; während $PM_{Max.} = 790$ war.

Die Werthe des verschwindenden Moments liegen zwischen den Grenzen 37,6 und 196,8. Den ersteren Werth nahm das ver-

schwindende Moment an, wenn die magnetisirende Kraft von Null an allmählig bis zu derjenigen Größe anwuchs, auf welche sie bei den vorigen Versuchen mit Oeffnung des Unterbrechers sank, und den letzteren erhielt es, wenn die Kraft von dem Maximalwerthe an — bei Ausschluß der Paralleitung — durch allmählige Einschaltung des Rheostatenwiderstands 184 S. E. auf den kleineren Werth gebracht war. Die Differenz 196,8—37,6 = 159,2 ist also die Hysteresis. Kleiner als 196,8 ergab sich das verschwindende Moment auch dann, wenn dieselbe Rolle auf „O.S.J." geschaltet die Parallelleitung bildete, aber, wie $\delta . PM$, welches gleich 9,1 war, so war auch das verschwindende Moment bei Wiederholung des Versuchs dann vollkommen constant gleich 140,2. Man kann also durch rasche Abnahme der Kraft einen großen Theil der Hysteresis zum Verschwinden bringen.

Bezüglich der Eigenschaften von Drathrollen führt demnach diese magnetische Untersuchung zu folgenden Resultaten:

1) Bei bifilar gewickelten (also z. B. Siemens'schen) Rollen mit entgegengerichteter Schaltung der Drähte bleibt die electrostatische Capacität klein, solange der Widerstand der Rolle die 1000 nicht erreicht. Bei 2000 ist die Capacität schon erheblich.

2) Chaperon'sche Rollen sind bis $W = 3000$, bis zu welcher Höhe des Widerstands sie geprüft sind, vollkommen capacitätsfrei. Daß auch der Coëfficient der Selbstinduction bei ihnen verschwindet, geht aus ihrer Vergleichung mit einer Summe kleiner Siemens'scher, d. h. inductions- und capacitätsfreier Widerstände hervor.

Wenn also auch das beschriebene magnetische Verfahren geeignet war, Spuren von Selbstinduction und electrostatischer Capacität bei einer Rolle zu erkennen, so ermöglichte es doch nicht, die beiden Eigenschaften auseinander zu halten; denn beide beeinflußten das magnetische Moment in der gleichen Richtung. Man erreicht jedoch dieses Ziel mit einer kleinen Abänderung der Methode.

Giessen, den 28. April 1894.

Ueber den Ersatz des Dirichlet'schen Princips.

Von

F. v. Dalwigk in Göttingen.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 5. Mai 1894).

Die Integration von $\Delta u = 0$ bei gegebenen stetigen oder abteilungsweise stetigen Randwerten, die Lösung der Randwertaufgabe, ist u. a. möglich für die Kreisfläche, jedes Kreisbogenzweieck, jedes Kreisbogendreieck mit zwei rechten Winkeln — selbst wenn der dritte Winkel 0 ist — und für die m-blättrige kreisförmige Fläche um einen Verzweigungspunkt. Mittels des Grenzüberganges durch alternierendes Verfahren ist daher dasselbe zu erkennen für jedes ebene Gebiet, welches von einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisbogen begrenzt wird, wobei die Begrenzung Spitzen enthalten darf. Daß nun an die Stelle der Geraden und Kreisbogen auch Stücke analytischer Linien treten dürfen, hat Herr Schwarz ebenfalls gezeigt. Ueber die Zulässigkeit von Spitzen sind nur seine Resultate veröffentlicht (Werke II, 134), doch kann man solche Spitzen, in denen zwei analytische Linien sich einfach berühren, leicht auf zwei Arten behandeln.

Es liegt nun nahe, die Arbeit „zur Theorie der Abbildung" aus dem Züricher Programm für das Jahr 1869/70 (Werke II, 108—32) in Betracht zu ziehen. Dann sieht man, daß auch nicht analytische Randteile auftreten dürfen von der dort besprochenen sehr allgemeinen Natur, sofern sie nur nach außen convex sind (und sofern sie, vorläufig wenigstens, mit den anstoßenden Randteilen keine Spitzen nach außen bilden). Damit drängte sich mir die Frage auf: Kann man durch Hinzunahme einfacher neuer Gesichtspunkte auch concave nicht analytische Randteile erledigen?

Es kommt dabei im Grunde nur auf die Lösbarkeit der Randwertaufgabe in einem sichelförmigen, convex-concaven Gebiet an. Und hier konnten drei Gedanken möglicherweise zur Entscheidung führen:

1) Ist die Methode in der Arbeit „zur Theorie der Abbildung" ihrem wahren Wesen nach gebunden an eine convexe Grenzlinie?

2) Kann man an der convexen Seite eines Curvenstücks ein Gebiet abgrenzen, welches durch eine einfache conforme Abbildung in ein convexes Flächenstück übergeht?

3) Kann man die Randwertaufgabe in einem convex-concaven Gebiet durch ein geeignetes alternierendes Verfahren lösen?

Jeder Weg führt zum Ziel, worüber hier nur einige Andeutungen gegeben werden sollen:

1) Mit verhältnismäßig geringen Aenderungen kann man die ganze Behandlungsweise der Schwarz'schen Arbeit übertragen auf den Fall, daß die Randlinie C des Gebietes durch jeden von O ausgehenden Radiusvektor nur einmal getroffen und dabei unter einem von 0 verschiedenen Winkel geschnitten wird — d. h. daß die Tangentenschaar von C eine gewisse Umgebung des Punktes O nicht trifft [1]). Dabei darf die Randlinie sehr allgemeinen Charakter haben, die Annahme einer abteilungsweise stetigen Krümmung ist z. B. nicht nötig [2]).

2) Eine Curve habe die Eigenschaft, daß es einen Kreis von endlichem festen Radius giebt, der an ihrer concaven Seite hinrollen kann und dabei immer nur die Berührungsstelle mit ihr gemein hat. Man benutzt von der Curve nur ein so kurzes Stück, daß ein fester Punkt P vorhanden ist, der vom rollenden Kreis immer umschlossen wird. Bildet man nun von P aus das Curvenstück und die Kreisschaar ab mittels reciproker Radien, so ist leicht zu sehen, daß der convexen Seite des Curvenstücks die concave Seite ihres Bildes entspricht. Und das weitere ist einfach.

3) Als ich die Frage stellte, kannte ich aus dem Neumann'schen Buch über Abel'sche Integrale die s. g. disjunktive Combinationsmethode. Sie löst die Randwertaufgabe für den Kreisring, welcher dabei als das gemeinsame Stück einer Kreisfläche und des äußeren Gebietes um einen Kreis auftritt. Hierin lag für mich die Veranlassung, mit den Schwarz'schen Mitteln das gemeinsame Stück zweier Gebiete zu behandeln, deren Ränder sich durchdringen (oder, was mehr umfaßt, bei denen von den Schwarz'schen L_0, L_1, L_2 und L_3 die Teile L_0 und L_3 nicht beide fehlen). Die Lösung ist einfach [1]). Schließlich hat man diese Methode anzuwenden auf das gemeinsame Stück des äu-

---

1) Beiläufig bemerke ich, daß auch die Painlevé'sche Untersuchung für ein convexes Gebiet (Compt. R. 1891. I.) sich auf ein solches Gebiet übertragen läßt.

2) Uebrigens war dieses Verfahren Herrn Schwarz bekannt.

ßeren Gebietes um eine convexe Curve und des Inneren einer solchen Curve. Die Lösbarkeit der Randwertaufgabe im äußeren Gebiet um eine convexe Curve kann auch auf Grundlage Schwarz'scher Untersuchungen erkannt werden, außerdem ist sie durch Herrn Neumann bewiesen worden. — Ich bemerke noch, daß dieser dritte Gedanke auch im Raum bei Anschluß an die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels ausreicht, um eine Lücke auszufüllen, auf welche Herr Neumann in der vierten Bemerkung der Einleitung seines Werkes über das logarithmische und Newton'sche Potential hinwies.

— Hat die Begrenzung des Gebietes in der Ebene noch eine endliche Anzahl von einspringenden Spitzen oder von solchen ausspringenden Spitzen, bei denen die beiden Curvenstücke sich nur einfach berühren, so macht dies keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Beim Lesen von art. 21 der Riemann'schen Dissertation stellte ich mir eine Frage, die ich später allerdings als schon mehrfach ausgesprochen und in manchen Fällen auch gelöst erkannte: u sei die Green'sche Funktion eines einfach zusammenhängenden Gebietes im Bezug auf einen bestimmten inneren Punkt, d. h. u verschwinde am Rand und sei in dem Punkt unendlich wie $\lg|z-z_0|$ (wenigstens, wenn der Punkt kein Verzweigungspunkt ist) und erfülle im Innern die Bedingung $\Delta u = 0$. Ueber $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ am Rand weiß man bei nicht analytischer Randlinie nichts und darum fragt sich, ob die dem u zugeordnete Größe v am Rande überhaupt bestimmt und stetig ist, ob die Abbildung des Gebietes durch e^{u+vi} auf einen Kreis vom Radius 1 wirklich auch für den Rand bestimmt und eindeutig ist.

Man kann an einer kurzen Randstrecke — selbst wenn sie eine Ecke oder eine Spitze der früher besprochenen Arten in sich enthält — ein Gebiet abgrenzen, welches conform auf ein Stück an einer Geraden so abbildbar ist, daß dem ursprünglichen Randstück das gerade Stück entspricht und hierbei das eindeutige Entsprechen der Begrenzungen wirklich gesichert ist. Das u ist dann auch definiert in dem Flächenstück der Hülfsebene und läßt sich dort über die geradlinige Begrenzungsstrecke fortsetzen, ohne sich auf ihr irgendwie singulär zu erhalten. Dort ist darum das v

---

1) Erst viel später sah ich, daß ich damit nur ein Gegenstück der zweiten Neumann'schen Combinationsmethode gefunden hatte, während die Methode, an welche ich anknüpfte, ein Specialfall seiner ersten Combinationsmethode ist.

auch bestimmt, und daraus schließt man, daß es auf dem Randstück in der ursprünglichen Figur bestimmt und stetig ist und in der positiven Umlaufsrichtung zunimmt.

Man erhält so den Satz: Gegeben sei ein endliches einfach zusammenhängendes Gebiet, welches ein Stück der Ebene einfach[1]) bedeckt. Die Randlinie sei bis auf einzelne Ecken und Spitzen der früher genannten Art stetig gebogen und habe Wendepunkte höchstens in endlicher Zahl. Dann giebt es eine Funktion $F(z) = e^{u+vi}$, welche die Abbildung auf einen Einheitskreis vermittelt, und zwar ist $F(z)$ auch am Rande noch eindeutig bestimmt und stetig. $F'(z)$ ist im Innern vorhanden und nie null, sein Vorhandensein am Rand steht nicht fest. Die Abbildung ist conform im Innern, (1,1)-deutig im Innern und für die Begrenzung. Aber man kann sogar durch eine besondere Untersuchung von einfacher Art nachweisen, daß eine im Rand endende Curve und ihr Bild gleiche Winkel mit den zugehörigen Randlinien bilden.

Auf Grund der 2. Neumann'schen Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels (1888) kann man in einer Hinsicht noch weiter gehen, man kann hinreichende Bedingungen aufstellen dafür, daß $F'(z)$ an einer Randstrecke bestimmt, stetig und wesentlich von 0 verschieden ist: Diese Randstrecke braucht dazu nur eine Krümmung zu haben, die mit ihrem Differentialquotienten im Bezug auf die Bogenlänge stetig ist; doch stören einzelne sprungweise Aenderungen des Differentialquotienten nicht einmal.

Ich denke meine Untersuchungen, von denen ich hier einige Hauptpunkte anführte, bald im Zusammenhang zu veröffentlichen.

---

1) Diese Einschränkung soll nur die Aussprache des Satzes erleichtern.

Ueber Verbindungen der Carvonreihe und das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone (III).

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1894.

Wenn man das Carvon, $C_{10}H_{14}O$, in alkoholischer Lösung mit metallischem Natrium behandelt, nimmt es 4 Wasserstoffatome auf und geht in Bihydrocarveol, $C_{10}H_{17}.OH$, über. Mäßigt man aber die Reaction, so beobachtet man das Auftreten eines anderen Products. Das Carvon addirt dann nämlich nur zwei Wasserstoffatome, die entstehende Verbindung ist aber auffallender Weise nicht wie man erwarten sollte, der Alkohol $C_{10}H_{15}.OH$, also Carveol, sondern ein Keton und zwar das schon bekannte Bihydrocarvon $C_{10}H_{16}O$, das ich früher durch Oxydation des Bihydrocarveols gewann. Am bequemsten kann man nach Versuchen, die Hr. Schrader ausgeführt hat, das Keton bereiten, wenn man Carvon mit Zink und Natronlauge einige Stunden kocht. Das Product wird durch seine Bisulfitverbindung hindurch gereinigt.

Bei dieser gemäßigten Reduction des Carvons durch Zink in alkalischer Flüssigkeit, tritt außerdem noch ein interessantes Nebenproducct auf. Nach dem Abdestilliren der bei der Hydrirung entstandenen flüchtigen Verbindungen, behält man im Rückstand eine harzige Masse, die zum großen Theil aus einem krystallinischen Körper besteht, den man durch Ausziehen mit Methylalkohol gewinnen und schließlich in großen bei 148—149° schmelzenden Krystallen isoliren kann. Diese Verbindung scheint nach den vorliegenden Analysen nichts anderes zu sein als ein Pinakon, dem man die Formel $C_{10}H_{14}\frac{OH\ HO}{\quad\quad}C_{10}H_{14}$ zu geben hat.

Die Verbindung ist optisch activ.

Das aus dem Bihydrocarvon erhältliche Oxim, $C_{10}H_{16}NOH$, tritt immer in zwei verschiedenen Modificationen auf. In Nadeln und in prismatischen bei 88° schmelzenden Krystallen. Erstere sind in Lösungsmitteln schwerer löslich als letztere und scheiden

sich daher immer zuerst aus. Bleiben die nadelförmigen Krystalle aber einige Zeit mit Alkohol in Berührung, so beobachtet man, wie sie sich allmählich in die andere Modification verwandeln.

Eine wesentliche Veränderung erleidet das Oxim bei der Behandlung mit concentrirter Schwefelsäure. Es wird dabei in ganz ähnlicher Weise isomerisirt, wie ich das für andere Oxime nachgewiesen habe. Schmelzpunkt (86—87°) und Aussehen des Umwandlungsproducts zeigen sich zwar wenig verändert. Das chemische Verhalten ist aber ein anderes. Namentlich verdünnten Säuren gegenüber ist das Präparat ungleich beständiger als das normale Oxim. Auch verbindet es sich nicht direct mit Halogenwasserstoffsäuren. Diese werden von dem normalen Bihydrocarvonoxim leicht aufgenommen unter Bildung wohl characterisirter Additionsproducte.

Das Bromhydrat $C_{10}H_{16}.NOH.HBr$ schmilzt bei 109° und erleidet bei diesem Punkt eine sehr merkwürdige Zersetzung. Es verliert nämlich Wasser und es entsteht das Hydrobromid einer aromatischen Base gemäß der Gleichung:

$$C_{10}H_{16}NOH.HBr = H_2O + C_{10}H_{15}N.HBr.$$

Diese so entstehende Base ist nun nichts anderes als Carvacrylamin.

Dieselbe Base entsteht auch, wenn man Thujonoxim mit Wasser entziehenden Mitteln, z. B. mit Chlorzink behandelt und nach Versuchen, die Hr. Neumann hier ausgeführt hat, kann man auch Carvoxim in Carvacrylamin umwandeln, wenn man es mit Kali auf 230—240° erwärmt.

Zu krystallisirten Brom-Additionsproducten des Carvon und Bihydrocarvon hatte man bisher nicht gelangen können. Wenn man diesen Verbindungen in üblicher Weise Brom zuführt, indem man das Halogen zu einer Auflösung der Ketone in feuchten oder trockenen Lösungsmitteln giebt, erhält man nur flüssige Producte. Ganz anders gestaltet sich der Versuch, wenn man die Verbindungen der gleichzeitigen Einwirkungen von Brom und Bromwasserstoff aussetzt. Man erhält dann unter geeigneten Bedingungen feste Körper, welche sich durch ein außerordentliches Krystallisationsvermögen auszeichnen. Das Carvon giebt ein Tetrabromid $C_{10}H_{14}O.Br_4$, das in seiner inactiven Modification bei etwa 75° schmilzt. Aus dem Bihydrocarvon entsteht ein Bibromid, $C_{10}H_{16}OBr_2$, das in seinen activen Modificationen bei 69—70°, in seiner inactiven bei 96—97° schmilzt.

Eine, wie es scheint, gleich zusammengesetzte Verbindung kann man auf einem eigenthümlichen Wege darstellen. Löst man das gesättigte Oxydationsproduct des Terpineols $C_{10}H_{20}O_3$ in Eisessig-Bromwasserstoffsäure und fügt nach einiger Zeit zu der Lösung Brom, so entsteht ein aus Alkohol schön krystallisirendes, gegen 100° schmelzendes Bibromid. Dasselbe ist ziemlich zersetzlich und färbt sich schon beim Liegen an der Luft nach einigen Tagen roth.

Ein neuer und wichtiger Uebergang des Limonen in Carvon ist in folgender Weise bewerkstelligt. Limonentetrabromid geht beim Kochen mit Natriummethylat in den gebromten Aether $C_{10}H_{14}Br\,OCH_3$ über, der im Vacuum bei etwa 140° siedet. Diese Verbindung hat folgende Eigenschaften: d = 1,251 bei 18° n_D = 1.5196. Mit Bromwasserstoff geht sie in Dipententetrabromid über, bei der Reduction in die entbromte Verbindung: $C_{10}H_{15}.OCH_3$, welche ein Carveolmethylaether ist. Diese Substanz siedet bei 210°, d = 0,9065 bei 18°, n_D = 1.47586. Bei der Oxydation liefert sie inactives Carvon, das durch Ueberführung in das bei 93° schmelzende Oxim mit Sicherheit identificirt worden ist.

Zu demselben Carveolmethylaether kann man auch gelangen, wenn man vom gewöhnlichen, krystallisirten Terpineol $C_{10}H_{17}.OH$ ausgeht. Addirt man zu diesem Brom und tauscht dann OH gegen Br aus, so erhält man ein Tribromid $C_{10}H_{17}Br_3$, das, mit Natriummethylat behandelt, auch reichliche Mengen des Aethers $C_{10}H_{15}OCH_3$ liefert. Diese Reaction bietet einen neuen Beleg für die Richtigkeit der schon durch Baeyer gemachten Annahme, daß in jenem Tribromid aus Terpineol die drei Bromatome an derselben Stelle stehen wie drei Bromatome des Limonentetrabromids. Das vierte Bromatom in letzterem zeichnet sich aber durch die Festigkeit, mit der es gebunden ist vor den anderen aus.

Als das Terpen, welches bezüglich seiner Constitution noch am allerwenigsten klar war, mußte bis jetzt das Phellandren gelten. Gemeinsam mit Hrn. Herbig habe ich daher eine Untersuchung des Kohlenwasserstoffs vorgenommen, welche sehr erwünschte Einblicke in dessen Natur und seine Beziehungen zu anderen Substanzen der Terpenreihe eröffnet hat.

Bei Anwendung geeigneter Reductionsmittel gelingt es aus dem Phellandrennitrit zwei Verbindungen zu erhalten. Einen Alkohol und eine Base.

Die Base hat die allergrößte Aehnlichkeit mit dem aus Carvoxim erhältlichen Hydrocarvylamin, ist mit diesem aber nicht identisch. Die Base siedet bei 214—216°, d = 0,873, n_D = 1.46998

bei 20⁰. Ihr gut krystallisirtes Chlorhydrat schmilzt bei 197⁰, die Acetylverbindung bei 156—157⁰, der einfach substituirte Harnstoff bei 163—166⁰. Durch salpetrige Säure läßt sich die Base in einen Alkohol, dieser in ein Keton überführen, das ein schön krystallisirendes bei 98—99⁰ schmelzendes, den Analysen nach mit Menthonoxim isomeres Oxim giebt. Das Keton gehört jedenfalls der Carvonreihe an und damit ist sicher gestellt, daß auch Phellandren unter die Bihydrocymole einzureihen ist.

Ueber das Thujon liegen folgende neue Beobachtungen vor. Wenn man das Keton mit verdünnter wäßriger Schwefelsäure auf etwa 200⁰ erhitzt, so entsteht nach Versuchen, die Dr. Scharfenberg ausführte, eine isomere bei 230—231⁰ siedende Verbindung. Auch Kochen mit etwas concentrirterer Säure unter gewöhnlichem Druck genügt zu der Umwandlung. Das Umwandlungsproduct giebt, mit Hydroxylamin behandelt, ein Oxim, welches bei 117—118⁰ schmilzt, aus dem durch Erwärmen mit verdünnter Säure das Keton schwer regenerirt wird und das identisch ist mit dem Umwandlungsproduct des Thujonoxims, welches ich neulich (Nachr. d. Ges. d. Wiss. 1893, 752) beschrieben habe.

Thujontribromid $C_{10}H_{13}Br_3O$ reagirt leicht mit Natriumalkoholaten. Bei der Behandlung der Verbindung mit Natriummethylat entsteht eine gut krystallisirende Verbindung der Zusammensetzung $C_{10}H_{12}BrO.OCH_3$ von schwach sauren Eigenschaften, welche das Brom außerordenlich fest gebunden enthält.

Die Untersuchung des mit dem Campher isomeren und mit diesem nah verwandten Fenchon ist auch fortgesetzt und hat zu neuen Ergebnissen geführt. Hr. Holste fand u. a., daß die neulich schon erwähnte (Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. 1893, 520) Fenchocarbonsäure beim Destilliren eine eigenthümliche Spaltung erleidet. Es entsteht dabei eine ungesättigte Säure $C_{11}H_{16}O_2$, welche mit Wasserdämpfen flüchtig ist und bei 174⁰ schmilzt. Gelegentlich einer gemeinsam mit Hrn. Schwalm ausgeführten Untersuchung gelang es Klarheit in die Beziehungen des s. g. α- und β-Isofenchonoxims zu bringen. Das bei 114⁰ schmelzende α-Isofenchonoxim, welches durch Kochen des Fenchonitrils mit Alkali entsteht, ist nichts anderes als das Amid der Fencholensäure. Fencholensaures Ammoniak läßt sich beim Erhitzen im zugeschmolzenen Rohr leicht in jene Verbindung überführen, die ihrerseits bei andauerndem Kochen mit Alkali Fencholensäure giebt und mit Wasser entziehenden Agentien wieder Fenchonitril. Das bei 137⁰ schmelzende β-Isofenchonoxim entsteht sehr leicht aus der α-Verbindung durch Erwärmen mit Säuren. Es ist

diese β-Verbindung weder Oxim, noch Amid, sondern eine Base, welche ziemlich beständige Salze giebt. Mit Phosphorsäureanhydrid erwärmt, geht die Base auch wieder in Fenchonitril über. Augenscheinlich findet zunächst eine Rückverwandlung in die α-Verbindung, also in das Säureamid statt. Die Beziehungen der Base zum Amid sind jetzt ganz durchsichtig. Das Amid (α-Verbindung) ist ungesättigt; die Base (β-Verbindung) ist gesättigt. Beim Kochen mit Säuren addirt das Amid Wasser, dessen OH mit Wasserstoff des NH_2 als H_2O austritt. Mit andern Worten, die bisher als β-Isoxim bezeichnete Substanz ist eine bicyclische Verbindung, ein Lactam, welches sich analog bildet wie Carbostyril oder Cumarin. Diese Thatsache giebt werthvolle Anhaltspunkte für die Beurtheilung der Constitution der Fencholensäure, welche noch durch folgende Beobachtungen ergänzt werden.

Bei der Reduction des Fencholensäureramids in alkoholischer Lösung durch Natrium entsteht auffallender Weise, allerdings nur in sehr mangelhafter Ausbeute, ein Alkohol $C_{10}H_{17}OH$ von folgenden Eigenschaften:

$$d = 0{,}927 \text{ bei } 20^0,\ n_D = 1.476,\quad \text{Siedepunkt } 218^0.$$

Der Alkohol ist ungesättigt und liefert, mit verdünnter Schwefelsäure gekocht, ein isomeres, gesättigtes Oxyd $C_{10}H_{18}O$. Dieses siedet bei 183—184^0, $d = 0{,}925$ bei 20^0, $n_D = 1.46108$ daraus $M = 45{,}69$ ein gesättigtes Oxyd $C_{10}H_{18}O$ verlangt 45.61. Abgesehen von dem etwas höheren Siedepunkt ist dies Oxyd vom Cineol gar nicht zu unterscheiden. Es hat denselben Geruch und giebt, in einer Petrolätherlösung mit Bromwasserstoff behandelt auch eine dem Cineolbromhydrat ganz analoge, krystallisirte Verbindung.

Endlich habe ich die Studien über das Pinol fortgesetzt, deren wichtigstes Resultat das ist, daß man diese Verbindung, $C_{10}H_{16}O$, durch successive Addition von Brom und Bromwasserstoff in ein bei 160^0 schmelzendes Tribromid $C_{10}H_{17}OBr_3$ überführen kann. Wenn man das Tribromid reducirt, erhält man ein ungesättigtes Keton, das mit dem Keton $C_8H_{14}O$ aus dem Cineol und dem Keton $C_9H_{16}O$ aus dem Thujon große Aehnlichkeit besitzt, aber bei 212—215^0 siedet und noch 10 Kohlenstoffatome besitzt. Die Verbindung scheint mit Citral (und also auch mit Cineol) isomer zu sein. Bei weiter gehender Reduction geht sie in einen bei 215—217^0 siedenden aliphatischen Alkohol von sehr angenehmem Linalool-Geruch über. Bei den geschilderten Vorgängen findet demnach eine Ringsprengung statt und es ist ein neuer und bei der Einfachheit des Vorgangs besonders wichtiger Uebergang eines Terpenderivats in eine Substanz mit kettenförmiger Anordnung der Atome im Molekül erreicht.

Pinolbibromid, $C_{10}H_{16}Br_2O$ geht bei der Reduction in festes Terpineol über.

Die Constitution des Pinols ist durch diese Umformungen ganz durchsichtig geworden.

Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile.

Von

J. Hermes in Lingen.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 5. Mai 1894.)

1) Bekanntlich erfordert die Gleichung:

$$r^p - 1 = 0 \text{ für } p = 2^{2^\mu} + 1$$

zu ihrer Auflösung im Falle, daß p eine Primzahl ist, nur quadratische Gleichungen. p wird Primzahl für ganzzahliges $\mu \lesseqgtr 4$, ist dagegen zerlegbar für $\mu = 5$ und 6, für $\mu > 6$ liegt meines Wissens keine Untersuchung vor. Der Fall: $\mu = 2$ entspricht dem von Gauss[1]) construierten regulären 17-Eck, der Fall: $\mu = 3$ dem 257-Eck, das Richelot in 9. Bande des Crelle'schen Journals ausführlich behandelt hat. Es schien nun die Frage von Interesse, ob sich bei beliebigem μ die Endformeln (d. s. die Perioden $\overset{\nu}{\eta}$ verschiedener Ordnung) als Formeln in μ darstellen lassen. Das ist von mir in Crelle's Journal 87 versucht und bis zur Ordnung $\nu \lesseqgtr \mu + 2$ durchgeführt worden. Die höheren Ordnungen boten Schwierigkeiten dar bei allgemeiner Behandlung und es wurde daher der noch übrige specielle Fall: $\mu = 4$, welcher der Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile entspricht, in Angriff genommen.

2) Nach Richelot's Vorgang kam dabei in erster Linie die Zerlegung von p in die Summe von Quadraten in Betracht $p = \sum e_k^2$. Ordnet man die Grundzahlen e_h in Carré und Doppelcarré und liest sie in der Reihenfolge, wie sie die natürliche Zahlenreihe in folgendem Schema

1) Gauss Werke I 462 und II 186.

1	2	5	6	17 etc.
3	4	7	8	
9	10	13	14	
11	12	15	16	

angiebt, so bleiben die einzelnen Gruppen der e_h bei veränderter primitiven Wurzel: ε invariant und es ändert sich nur die Stellung in der Gruppe. Der Index k nimmt, während die e in der bezeichneten Reihenfolge gelesen werden, folgende Werte an:

bei $\nu = 2$	0,				1,			
$\nu = 3$	0,		2,		1,		3,	
$\nu = 4$	0,	4,	2,	6,	1,	5,	3,	7

etc.

Die hier gegebene Verteilung bezieht sich auf $\varepsilon = 11490$, indem für diese primitive Wurzel $\varepsilon^{\vartheta} \equiv +2 \mod. 65537$ wird,

$$\vartheta = 2^{2^{\mu}-\mu-1} = 2048.$$

Von den 15 Zerlegungen bei $\mu = 4$ sind die ersten sieben:

$\nu = 2;\ p =$

−1	−256

[bedeutet: $(-1)^2 + (-256)^2 = p$]

$\nu = 3;\ p =$

255	0
−16	−16

$\nu = 4;\ p =$ [1]

−225	0	60	−60
−16	16	−60	60

$\nu = 5;\ p =$

−81	0	36	108
−56	56	−108	−36
54	−6	6	102
102	6	−6	54

$\nu = 6;\ p =$

−49	0	88	8	48	−38	62	20
80	−80	−8	−88	−60	−2	4	−22
−30	−58	30	−10	−22	4	−2	−60
10	−30	58	30	20	62	−38	48

1) Die Herleitung dieser Formeln $\{$bis $\nu = 5\}$ ist in Bd. 87 des Crelle'schen Journals pag. 94 gegeben.

$v = 7;\ p =$

71	0	32	80	8	22	18	4
40	−40	−80	−32	16	30	8	34
18	−6	42	22	−34	−8	−30	−16
−22	−42	6	−18	−4	−18	−22	−8
36	−60	−12	4	10	−4	6	62
−2	32	16	26	−8	12	64	−6
−6	64	12	−8	26	16	32	−2
62	6	−4	10	4	−12	−60	36

$v = 8;\ p =$

23	0	12	20	0	30	−2	8	0	8	−6	−8	−2	40	−16	18
20	−20	−20	−12	−24	2	16	−34	−24	−32	22	−30	−22	−2	−10	0
14	−18	−14	−2	34	−16	−2	24	−34	−34	24	12	−32	−20	−44	24
2	14	18	−14	−8	2	−30	0	−40	24	6	0	−8	24	2	−28
40	−32	24	−52	−18	20	−42	−2	−28	2	24	−8	0	6	24	−40
−10	−12	8	2	40	24	−12	−18	24	−44	−20	−32	12	24	−34	−34
18	12	−24	−40	−2	−8	12	10	0	−10	−2	−22	−30	22	−32	−24
2	42	−20	18	52	−24	32	−40	18	−16	40	−2	−8	−6	8	0

In Bezug auf die übrigen Zerlegungen muß auf das Diarium vgl. 9) verwiesen werden[1]), doch mögen noch die Grundzahlen der ungeraden Quadrate und die letzten beiden Zerlegungen Platz finden.

$v = 9,\ e_0 = +31;\quad v = 10,\ e_0 = -9;\quad v = 11,\ e_0 = -9;$
$v = 12,\ e_0 = -1;\quad v = 13,\ e_0 = -15;\quad v = 14,\ e_0 = +1;$

$$v = 15;\quad p = (+1)^2 + 8192\,(\pm 2)^2 + 2048\,(\pm 4)^2$$
$$v = 16;\quad p = (-1)^2 + 16384\,(\pm 2)^2.$$

Es sei hervorgehoben, daß die Zahlen e nicht nur die Gleichung:

$$p = \sum_0^{4v-1} (e_k)^2,$$

sondern auch noch das System der sog. Bedingungsgleichungen:

$$\sum_0^{4v-1} e_k e_{k+h} = 0;$$

h von $1 \ldots\ldots (2v-1)$; befriedigen müssen, wobei $v = 2^{\nu-3}$ und $e_{k+h} = -e_{k+h-4v}$ zu setzen ist, falls $k + h \geqq 4v$.

1) Vgl. daselbst pag. 88 d. Die Anordnung ist dort jedoch in Colonnen gemacht.

3) Zur wirklichen Durchführung reichen indessen diese Zerlegungen nicht hin, vielmehr mußte auf die ältere Methode von Gauss zurückgegriffen werden, doch konnten dabei in der Rechnung Erleichterungen eintreten, so daß die Aufstellung[1]) und Auflösung der quadratischen Gleichungen verhältnismäßig einfach wurde. Zu diesen Vereinfachungen gehört: a) die Einführung einer linearen Verbindung der Perioden statt des Quadrats einer Periode, so ist z. B.

$$\left\{\overset{3}{\eta}_{\varepsilon^0}\right\}^2 = 2^{2^\mu-3} + [2^{2^\mu-6} + 3 \,.\, 2^{2^{\mu-1}-3} - 1] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^0}$$

$$+ [2^{2^\mu-6} - 2^{2^{\mu-1}-3}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^4} + [2^{2^\mu-6} - 2^{2^{\mu-1}-3}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^2} + [2^{2^\mu-6} + 2^{2^{\mu-1}-3}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^6}$$

$$+ [2^{2^\mu-6} - 3 \,.\, 2^{2^{\mu-1}-4} - 2^{2^{\mu-2}-2}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^1} + [2^{2^\mu-6} - 3 \,.\, 2^{2^{\mu-1}-4} + 2^{2^{\mu-2}-2}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^5}$$

$$+ [2^{2^\mu-6} + 2^{2^{\mu-1}-4} - 2^{2^{\mu-2}-2}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^3} + [2^{2^\mu-6} + 2^{2^{\mu-1}-4} + 2^{2^{\mu-2}-2}] \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^7},$$

was für $\mu = 4$ in:

$$\left\{\overset{3}{\eta}_{\varepsilon^0}\right\}^2 = 8192 + 1119 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^0} + 992 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^4} + 992 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^2} + 1056 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^6}$$

$$+ 972 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^1} + 980 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^5} + 1036 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^3} + 1044 \,.\, \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^7}$$

übergeht.

b) Die an sich zwar unwesentliche, hier aber, wo $2^{2^\mu} \equiv -1 \mod p$ ist, zu empfehlende Darstellung einer ganzen Zahl als algebraische Summe aus Potenzen von 2. Schreibt man dann die Exponentenunterschiede (Spatium genannt) und markiert sie, falls der Uebergang zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzen von entgegengesetztem Zeichen stattfand, so finden Rechnungsgesetze statt, die eine Aehnlichkeit mit den Dirichlet'schen Sätzen über Kettenbruchelemente[2]) haben und zur Reduction dienen.

Hauptsächlich sind es folgende vier:

I) $\ldots m,\ \ 0,\ \ n \ldots = \ldots (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) \ldots$

II) $\ldots m,\ \ \mathbf{1},\ \ n \ldots = \ldots \boldsymbol{m},\ \ n+1 \ldots$

III) $\ldots m,\ \ 0,\ \ n \ldots = \ldots m+1,\ \ n-1 \ldots$

IV) $\ldots m,\ \ 1,\ \ n \ldots = \ldots \boldsymbol{m},\ \ \mathbf{2},\ \ n-1 \ldots,$

woraus dann durch wiederholte Anwendung auch:

---

1) Vgl. 8).

2) Lejeune Dirichlet: Vereinfachung binärer quadratischer Formen. § 1; Berl. Akad. 1854.

V)	$\ldots m, 1, 1, n \ldots =$	$m, 2, n \ldots$	
VI)	$\ldots m, 1, 1, n$	$= m, 2, n$	
VII)	$\ldots m, 1, 1, n \ldots =$	$\ldots m, 3, n-1 \ldots$	
VIII)	$\ldots m, 1, 1, n$	$= \ldots m, (n+2) \ldots$	
IX)	$\ldots m, 1, 2, 2, n \ldots =$	$\ldots m, 2, 2, 2, (n-1) \ldots$	
X)	$\ldots m, 1, 2, 2, n$	$= \ldots m, 2, 2, (n+1) \ldots$	etc.

folgen.

4) Endformeln zur Construction des regulären 17-Ecks[1]) in geeigneter Abkürzung. [Hier ist $\varepsilon = 6$.]

Um die Wurzeln der Gleichung: $r^{17}-1 = 0$ mit wenigen Ziffern angeben zu können, sind folgende Punkte zu erörtern, die für $\mu \gtreqless 2$ gelten.

a) Irgend eine Einheitswurzel r^{ϱ} bezeichnen wir als Periode der letzten d. i. der $2^{\mu} = \mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Ordnung mit $\overset{\mathfrak{m}}{\eta}_n$, wenn $\varepsilon^k \equiv n \bmod p$ und $\varrho = \frac{n}{2}$; k heißt der Index, n die Nummer der Periode.

b) Die aus diesen Einheitswurzeln in bekannter Weise gebildeten Summen sind die Perioden $\overset{\nu}{\eta}_{\varepsilon^k}$ der früheren Ordnungen. Sie haben die Form:

$$\overset{\nu}{\eta}_{\varepsilon^k} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{\nu-1}{\eta}_{\varepsilon^k} + \overset{\nu}{\mathfrak{z}}_k \sqrt{2^{\mathfrak{m}-(\nu-1)} + \sum_h \overset{\nu}{c}_h \overset{\nu-1}{\eta}_{\varepsilon^{k+h}}}\right)$$

Es dürfen also nur die $\overset{\nu}{\mathfrak{z}}_k$, das sind die Vorzeichen der Quadratwurzeln und die Coefficienten $\overset{\nu}{c}_h$ angegeben werden. $\overset{0}{\eta}$ ist nämlich bekannt $= \overset{0}{\mathfrak{z}}\overset{0}{c}_0$ worin $\overset{0}{\mathfrak{z}} =$ minus und $\overset{0}{c}_0$ stets $= 1$ ist. Dies minus möge als erstes Zeichen in der Reihe der Vorzeichen hinzugenommen werden[2]).

c) Der Index k nimmt der Reihe nach die in 2) angegebenen Werte:

0
0, 1
0, 2, 1, 3 etc.

an. Da $\overset{\nu}{\eta}_{\varepsilon^{k+2^{\nu-1}}}$ ganz denselben Wert wie $\overset{\nu}{\eta}_{\varepsilon^k}$ hat, nur das entgegengesetzte Vorzeichen bei der $\sqrt{}$, so braucht nur die Hälfte der Vorzeichen $\overset{\nu}{\mathfrak{z}}_k$ angegeben zu werden. Ebenfalls können die $\overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{z}}$ der

1) Vgl. Bachmann, Kreisteilung pag. 67.
Serret: höhere Algebra, deutsch v. Wertheim, pag. 476.

2) Das zweite ist dann das von Kronecker: Sur une formule de Gauss in Bd. 1, série 2, Liouville Journal pag. 394 bestimmte Pluszeichen.

letzten Ordnung unterdrückt werden, denn für diese tritt $\pm i$ ein, je nachdem der Exponent von $r >$ oder $< \frac{p-1}{2}$ ist.

d) Um die Reihe der Vorzeichen kurz angeben zu können, teilen wir dieselbe willkürlich zu vier ab und bezeichnen: $++++$ mit 1, $+++-$ mit 2, $++-+$ mit 3, $++--$ mit 4, $+-++$ mit 5, $+-+-$ mit 6, $+--+$ mit 7, $+---$ mit 8. Wird hierin $+$ mit $-$ vertauscht, so werde die Ziffer durch fetten Druck markiert[1]).

e) Es läßt sich ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen den Coefficienten $\overset{\nu}{c}_h$ und den Grundzahlen: $\overset{\nu}{e}_k$ der obigen Zerlegung von p in Quadrate erweisen, der zur Kontrole dienen kann. Die Gesammtsumme der $\overset{\nu}{c}_h$ ist nämlich immer: -1. Zieht man aber die Summe der zweiten Hälfte von der ersten ab, so ergiebt sich: $\overset{\nu}{e}_0$. Für die größeren ν ist dieser Satz etwas zu modificieren, was hier nicht ausgeführt werden möge.

f) Die meisten der Coefficienten c_h sind Null; es sind daher für jede Ordnung ν nur diejenigen h namhaft zu machen, für welche c_h einen von Null verschiedenen Wert hat.

Nach diesen Vereinbarungen ist die Auflösung der Gleichung: $r^{17}-1 = 0$ in folgenden wenigen Ziffern enthalten:

$\mu = 2$		h	c_h	e_0 [nur zur Kontrole]
	$\nu = 1$	0	-1	-1
	$\nu = 2$	0	-1	-1
	$\nu = 3$	2 3	1 -2	-3
	$\nu = 4$	2	-1	-1

$z_6 = 6\ \mathbf{8}$.

Um nun hieraus wieder die Darstellung in ausführlicherer Form zu erhalten, hat man zunächst diese 5 Coefficienten in die obige Formel für $\overset{\nu}{\eta}$ einzuführen. Man erhält dann $\overset{0}{\eta} = \overset{0}{\mathfrak{z}}.1 = -1$, weil $z_6 = -, +, -+, -+++$ mit $-$ beginnt;

$$\overset{1}{\eta}_{\varepsilon^k} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{0}{\eta} + \sqrt{2^4 - \overset{0}{\eta}_1}\right); \quad k = 0; \quad \overset{1}{\eta}_{\varepsilon^{k+1}} = (\text{anderes Zeichen bei } \sqrt{})$$

$$\overset{2}{\eta}_{\varepsilon^k} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{1}{\eta}_{\varepsilon^k} \mp \sqrt{2^3 - \overset{1}{\eta}_{\varepsilon^k}}\right); \quad k = 0, 1; \quad \text{etc.}$$

$$\overset{3}{\eta}_{\varepsilon^k} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{2}{\eta}_{\varepsilon^k} \begin{smallmatrix}-\\+\\+\\+\end{smallmatrix} \sqrt{2^2 + \overset{2}{\eta}_{\varepsilon^{k+2}} - 2\overset{2}{\eta}_{\varepsilon^{k+3}}}\right); \quad k = 0, 2, 1, 3; \quad \text{etc.}$$

1) Es kann dann also die Reihe der Vorzeichen in eine Zahl z_ε zusammengefaßt werden, die von ε abhängt.

$$\overset{4}{\eta}_{\varepsilon^k} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{3}{\eta}_{\varepsilon^k} + (\pm i)\sqrt{2 - \overset{3}{\eta}_{\varepsilon^{k+2}}}\right).$$

Werden die Einsätze nun alle successive gemacht, so wird die letzte $\sqrt{\;}$ bei i für $k = 8$ und $p = 17$

$$\sqrt{\frac{p}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{p} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p}} - \frac{2}{2}\sqrt{\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p}}}}$$

d. i. die Seite des regulären 17-Ecks. Vgl. Gauß Werke I art. 365, pag. 462.

5) Die Construction des regulären 257-Ecks ist in analoger Weise — vgl. 4) — mit folgenden Ziffern gegeben: $\{\varepsilon = 115\}$

$\mu = 3$

ν	h	c_h	h	c_h	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	e_0
1	0	−1															−1
2	0	−1															−1
3	0	7							1	−8							15
4	0	1	4	−2	2	−2	6	−2			5	2	3	4	7	−2	−9
5	0	−1	8	2			6	−2			13	2			7	−2	−1
6	16	1	8	2							13	−2	27	−2			−7
7	16	1	40	−2													1
8	16	−1															−1

$z_{115} =$

7	8	1	6	8	2	3	4
7	7	2	5	7	2	1	2
7	2	2	1	3	3	7	6
1	7	5	7	3	8	1	4

oder in eine Reihe geschrieben:

$$z_{115} = 7\cdot 8\cdot 77\cdot 1625\cdot 72172157\cdot 8272341233387614$$ [1].

6) Die Construction des regulären 65537-Ecks ist durch Angabe der $\overset{\nu}{c}_h$ auf Seite 178 und 179 ausführbar, wenn noch die Vorzeichen bekannt sind.

Sie wurden für die niederen Ordnungen auf algebraischem, für die höheren auf trigonometrischem Wege ermittelt, zugleich mit den numerischen Werten der Perioden. Hierdurch war es auch möglich, die Rechnung im Ganzen zu controlieren. Wir

1) Als Zahl betrachtet, ist $z_{115} \equiv 0 \bmod 257$. Dies ist nur zufällig, denn z_8 z. B. ist $\equiv 111 \bmod 257$.

wollen aus jeder Ordnung die erste Periode, welche die Nummer $\varepsilon^0 = 1$ hat, anführen:

$$\overset{0}{\eta}_1 = -1$$
$$\overset{1}{\eta}_1 = 127{,}5009765\ldots$$
$$\overset{2}{\eta}_1 = -26{,}58292\ldots$$
$$\overset{3}{\eta}_1 = -62{,}34271\ldots$$
$$\overset{4}{\eta}_1 = -23{,}68614\ldots$$
$$\overset{5}{\eta}_1 = 24{,}62068\ldots$$
$$\overset{6}{\eta}_1 = 15{,}12077\ldots$$
$$\overset{7}{\eta}_1 = 33{,}90859\ldots$$
$$\overset{8}{\eta}_1 = 40{,}22580\ldots$$
$$\overset{9}{\eta}_1 = 32{,}0096\ldots$$
$$\overset{10}{\eta}_1 = 43{,}6329\ldots$$
$$\overset{11}{\eta}_1 = 25{,}2107\ldots$$
$$\overset{12}{\eta}_1 = 11{,}3732\ldots$$
$$\overset{13}{\eta}_1 = 3{,}9614\ldots$$
$$\overset{14}{\eta}_1 = -0{,}00015\ldots$$
$$\overset{15}{\eta}_1 = -1{,}9999999978\ldots$$
$$\overset{16}{\eta}_1 = -0{,}9999999989\cdots - i.0{,}0000479362\ldots$$
$$= r^{32769}.$$

Von den Vorzeichen (z_{11490}) möge hier nur der 32. Teil stehen, die übrigen siehe Diarium pag. 97.

$\mu = 4$. Die Konstruction des regulären

A)

ν	h	c_h^{ν}	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c
1	0	−1														
2	0	−1														
3	0	127														
4	0	−17			4	−32			2	−32			6	−32		
5	0	−53	8	12	4	−20	12	12	2	8	10	−16	6	32	14	−16
6	0	11	8	−34	4	−4	12	−10			10	10	6	−18	14	18
			24	−10	20	10	28	−8	18	2			22	−10	30	18
7	0	15	8	2	4	2	12	−4	2	−14	10	4			14	2
			40	2	36	4	44	10	34	−6	42	4	38	2	46	6
	16	−8	24	2	20	4	28	−6	18	−10	26	−16	22	10	30	6
	48	−4	56	6	52	4	60	2	50	8	58	6	54	2		
8	0	7	8	−2	4	−2	12	2	2	−2	10	4	6	−2		
			72	2	68	2					74	2	70	−4	78	4
			40	2	36	−4	44	−2	34	−2	42	8	38	4	46	6
	96	2			100	2	108	−6	98	−2	106	−2	102	2	110	−2
			24	−2	20	8	28	−2	18	−4			22	6	30	−6
	80	2	88	4	84	4	92	2					86	6	94	−4
	48	−2	56	−2	52	2	60	4	50	2	58	−4	54	−8	62	−4
	112	2	120	−2			124	−2	114	−2			118	2	126	−6
9	0	9									10	−2				
	128	−2	136	−2	132	2	140	−2			138	2			142	−2
											74	−2			78	−2
			200	2	196	−2	204	−2			202	−2			206	2
			40	−2							42	6	38	4	46	8
			168	2			172	2			170	2				
	96	2			100	2										
													230	2		
					20	−4							22	4		
	144	2			148	−4							150	−2	158	−2
	80	−2	88	2	84	4	92	2					86	2		
			216	−2									214	−6		
			56	2	52	−2	60	−2	50	4						
					180	−2	188	−2								
	112	2			116	−2			114	−2	122	−2	118	−2		
	240	2	248	2												
10	0	9	456	−2	340	2	172	2	50	−4	138	2	230	2	302	8
	400	−2	168	2	84	−2	92	2			42	−4	22	2	462	−2
	112	−2	344	2	100	−2					426	−2	38	−4		
	496	−2	56	−2	132	−2					298	−2	278	−2		
	352	2	504	−2									86	−2		
11	0	1	680	−2	340	2	684	2			138	−2	742	2	814	−2
	864	2	344	−2			604	−2					22	−2	302	−2
12	0	−1			340	2	684	2					742	−2	814	−2
	1024	2														
	1888	−2														
13	2048	1			2388	2	2732	2								
	1024	2														
14	2048	1			6484	−2	2732	−2								
	1024	2														
15	2048	1														
	9216	−2														
16	2048	−1														

B)

6 5537-Ecks ist enthalten in:

C)

h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	h	c	e_0
																−1
																−1
1	−128															255
1	24			5	32			3	88			7	−32			−225
1	20	9	−10	5	2	13	−16	3	14	11	44	7	−16	15	2	−81
1	−6	9	8	5	−6	13	2	3	−8			7	4	15	16	
17	−14	25	10	21	−16	29	−10	19	22	27	20			31	−14	−49
1	2	9	−4	5	4	13	2	3	−8	11	−2					
33	−2			37	−4	45	−6	35	−14	43	10	39	−2	47	−4	71
17	−8	25	6	21	8					27	10	23	−12	31	6	
49	−10	57	2	53	−2	61	−2	51	10	59	−14	55	6	63	−8	
		9	2	5	2	13	−4	3	2	11	6	7	−4	15	2	
65	−2	73	−4			77	−4	67	4	75	−4	71	2	79	2	
				37	2	45	−2			43	−2			47	4	
97	4							99	2	107	−2			111	2	
17	2	25	2					19	−2	27	−6					23
81	2	89	2	85	2			83	−2	91	4			95	−4	
49	2					61	−2	51	−6	59	−2			63	2	
		121	−2	117	−2	125	−2	115	2			119	−2			
1	−2									11	6	7	−2	15	−4	
129	−2	137	−2	133	−2			131	2					143	−2	
				69	2			67	2			71	2			
				197	−2			195	2					207	−2	
		41	−2	37	−2					43	2			47	4	
				165	−2					171	−2	167	−2			
97	−2							99	−2	107	−2	103	−2	111	2	
225	2	233	−2													
17	2	25	4	21	4			19	2	27	−4					31
		153	−2			157	−2							159	−2	
81	−2	89	−4	85	2	93	2									
								211	−2							
		57	2					51	−2							
177	2											183	−2	191	2	
						125	−2	115	4							
										251	−2	247	−2			
17	2	281	−4	341	2	93	2	371	4	11	6	71	2	303	−4	
177	2	313	2	69	2			323	2	43	−2			367	−2	
481	−2			21	−4			387	2					447	−2	−9
								19	−2							
								451	−2							
17	2	313	2	341	−2	605	2	371	4	523	−2	583	−2			
177	2			69	−2			323	2							−9
								387	−2							
1041	2	1337	2			605	−2	1347	2	523	−2					
1201	−2															−1
1041	−2	3385	−2					3443	−2							−15
								1347	−2							
																1
																1
																−1

und:

$z_{11490} =$

6	2	5	1	7	3	2	8	3	5	2	1	4	4	8	7	3 (zweites Zweiunddreißigstel hieran anschließend)
5	5	4	1	8	2	6	1	8	3	3	4	3	3	4	1	
3	2	2	3	7	3	4	5	6	4	8	4	7	5	7	4	
2	6	5	4	4	5	4	3	7	2	6	8	8	2	3	4	
7	6	7	5	7	4	4	6	6	3	4	8	7	6	5	2	
8	5	2	4	4	8	6	5	1	8	7	3	6	8	2	6	
8	6	5	1	8	4	2	1	5	3	3	5	1	1	5	5	
2	7	8	6	8	5	4	1	6	3	2	2	2	1	3	8	
8	4	4	5	5	6	8	4	5	8	2	7	6	2	4	4	
7	3	7	8	4	2	1	5	7	3	6	4	3	8	4	2	
7	2	8	3	8	6	1	1	6	5	8	7	4	7	2	8	
1	1	7	8	7	2	4	5	2	1	2	6	3	7	4	4	
5	8	5	3	7	6	2	8	5	8	2	6	5	6	4	6	
7	8	4	4	6	7	7	8	6	1	3	8	8	5	4	3	
1	5	4	5	1	7	7	8	1	6	1	8	8	7	8	6	
8	5	2	3	6	4	3	1	6	4	3	6	7	1	2	5	

2 (zweites Sechzehntel hieran anschließend).

Das zweite Achtel beginnt mit: **6**, das zweite Viertel mit: **8**, die zweite Hälfte: von

$$\begin{array}{|ll} 8 & 1 \\ 2 & 6 \end{array} \quad \text{bis} \quad \begin{array}{ll|} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{array}.$$

Es sind durch Abzählen 16496 Plus und 16272 Minus ermittelt. Eine Gesetzmäßigkeit in diesen Ziffern ist unwahrscheinlich, da willkürlich zu je vier abgeteilt wurde. In dieser Hinsicht erscheint namentlich eine Verbesserung der Methode wünschenswert.

7) In Bezug auf die Coefficienten $\overset{\nu}{c}_h$ dagegen lassen sich Verallgemeinerungen[1]) für beliebiges μ nachweisen und zwar leicht bis zur Ordnung $\nu \gtreqless \mu + 2$. Darüber hinaus treten Schwierigkeiten auf.

Wir haben für jede Primzahl $p = 2^{2^\mu}+1$, indem wir $\vartheta = 2^{2^\mu - \mu - 1}$ setzen:

---

1) Ueber die dabei angewendeten Determinanten siehe: Grunert's Archiv II. Reihe T. VIII p. 269 ff. „Ein Satz über Binominalcoefficienten." [Die pag. 288 aufgestellte Determinante z. B. hat den Wert: 2^{57}.] Vgl. auch Diarium pag. 50.

A) (vom Anfange aus)

$$\text{Ordnung } \nu = 1;\quad h = 0,\quad \overset{1}{c}_0 = -1;$$
$$\nu = 2;\quad h = 0,\quad \overset{2}{c}_0 = -1;\quad h = 1,\quad \overset{2}{c}_1 = 0;$$
$$\nu = 3;\quad h = 0,\quad \overset{3}{c}_0 = -1 + 2^{2^{\mu-1}-1}$$

(falls $\mu \gtreqless 3$) [für $\mu = 2$ kommt schon B) in Betracht, weil die Mitte bereits überschritten ist, so daß also für das reguläre 17-Eck diese allgemeinen Formeln ausreichen,]

$$h = 2,\quad \overset{3}{c}_2 = 0;\quad h = 1,\quad \overset{3}{c}_1 = -2^{2^{\mu-1}-1};\quad h = 3,\quad \overset{3}{c}_3 = 0.$$

$$\nu = 4;\quad h = 0,\quad \overset{4}{c}_0 = -1 + 2^{2^{\mu-2}} - 2^{2^{\mu-1}-3}$$
$$h = 4,\quad \overset{4}{c}_4 = -2^{2^{\mu-1}-3} = \overset{4}{c}_2 = \overset{4}{c}_6 = \overset{4}{c}_7,\quad (h = 2;\ 6;\ 7)$$
$$h = 1,\quad \overset{4}{c}_1 = -2^{2^{\mu-2}-1} + 2^{2^{\mu-1}-3};\quad \overset{4}{c}_5 = +2^{2^{\mu-1}-3};\quad (h = 5)$$
$$h = 3,\quad \overset{4}{c}_3 = 3.2^{2^{\mu-1}-3} - 2^{2^{\mu-2}-1}$$

etc.

B) (vom Ende aus)

$$\text{Ordnung } \mathfrak{m} = 2^\mu;\quad h = \vartheta,\quad \overset{\mathfrak{m}}{c}_\vartheta = -1$$

wenn i vor die Quadratwurzel gezogen wird. Jedes andere $\overset{\mathfrak{m}}{c} = 0$

$$\text{Ordnung } \mathfrak{m}-1;\quad h = \vartheta,\quad \overset{\mathfrak{m}-1}{c_\vartheta} = +1;\quad h = (2^\mu+2)\frac{\vartheta}{4};\quad \overset{\mathfrak{m}-1}{c_h} = -2.$$

Jedes andere $\overset{\mathfrak{m}-1}{c} = 0$; etc.

Zur Kontrole von A) und B) dient, wie erwähnt C) nämlich e_0

$$\overset{1}{e}_0 = -1;\quad \overset{2}{e}_0 = -1;\quad \overset{3}{e}_0 = 2^{2^{\mu-1}}-1,\quad \overset{4}{e}_0 = -(2^{2^{\mu-2}}-1)^2$$
$$\overset{5}{e}_0 = -2^{2^{\mu-2}}(2^{2^{\mu-4}} - 2^{-2^{-4+\mu}})^4\,[\mu \gtreqless 4]$$
$$\overset{6}{e}_0 = 2^{2^{\mu-2}}(-[2^{2^{\mu-5}} - 2^{-2^{-5+\mu}}]^8 + 4\,[2^{2^{\mu-5}} - 2^{-2^{-5+\mu}}]^4 + 4\,[2^{2^{\mu-5}} - 2^{-2^{-5+\mu}}]^2)$$

etc. schließlich: $\overset{\mathfrak{m}}{e}_0 = -1$.

8) Wir deuten nun den Weg an, auf welchem die Coefficienten $\overset{\nu}{c}_h$ in den speciellen Fällen $\mu = 3$ und $\mu = 4$ gewonnen sind. $p = 2^{\mathfrak{m}}+1$.

Man bilde zunächst alle eins-freien und nicht mit einander in demselben Drehungssinne cyclischen Zerlegungen der Zahl $\mathfrak{m}$ in Summenden, von denen eine ungerade Anzahl markiert ist. Man wird also von der $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Diagonalreihe der Euler-

schen Tafel[1]) die um eine Stelle nach rechts gerückte $(\mathfrak{m}-1)^{te}$ Diagonalreihe subtrahiren, um so die Anzahl der eins-freien Zerlegungen zu je einem, zwei, drei ... Summanden zu erhalten.

Jede dieser Anzahlen zerlege man nun mit Rücksicht auf gleiche oder ungleiche Summanden der Zahl $\mathfrak{m}$ in die Zähler von Brüchen, denen als Nenner: Producte von Facultäten der Anzahl Gleicher gegeben werden, multipliciere jede dieser Summen zusammengehöriger Brüche der Reihe nach mit $2^0.1$, $2^1.1!$, $2^2.2!$, $2^3.3! \ldots 2^s.s!$ und addiere, so wird man, wie hier nicht näher erörtert werden kann, in der That die Anzahl der verlangten Zerlegungen von: $\mathfrak{m}$ erhalten. Dieselbe wird, wie sich beweisen läßt, gerade $= \vartheta = 2^{2^{\mu}-\mu-1}$. Führen wir dies am Beispiele $\mu = 3$, wo $\mathfrak{m} = 2^3 = 8$ ist, durch.

Die 8. Diagonalreihe der Euler'schen Tafel lautet:

	1,	4,	5,	5,	3,	2,	1,	1,
die siebente:		1,	3,	4,	3,	2,	1,	1
Differenzen:	1,	3,	2,	1.				

Von diesen ist nur die 3 in 2 und 1 mit Rücksicht auf die Darstellungen der Zahl 8 in Ungleiche $\begin{cases}3+5\\2+6\end{cases}$ und in Gleiche $\{4+4$ zu zerlegen. Es werden mithin die verlangten Brüche:

$$\frac{1}{1!};\quad \frac{2}{1!1!}+\frac{1}{2!};\quad \frac{2}{1!2!},\quad \frac{1}{4!}$$

und somit die Gesammtanzahl

$$2^0.1.\left(\frac{1}{1!}\right)+2^1.1!\left(\frac{2}{1!1!}+\frac{1}{2!}\right)+2^2.2!\left(\frac{2}{1!2!}\right)+2^3.3!\left(\frac{1}{4!}\right)$$
$$= 1 \quad + \quad 5 \quad + \quad 8 \quad + \quad 2$$
$$= 2^4 = 2^{2^3-3-1} = 16.$$

Diese 16 eins-freien, nicht cyklischen, in ungerader Anzahl markierten Zerlegungen von 8 sind folgende:

8	6 2	5 3	4 4	4 2 2	3 3 2	2 2 2 2
	6 2	5 3		4 2 2	3 3 2	2 2 2 2
				4 2 2	3 2 3	
				4 2 2	3 3 2	

Man fasse nun jede dieser ϑ Zerlegungen $(a, b, c \ldots)$ cyklisch auf, so daß z. B. $(4, 2, 2) = (2, 2, 4) = (2, 4, 2)$ ist und bringe in

1) Euler: Introductio in analysis infinitorum. Tom I CXVI. De partitione numerorum pag. 275.

Beziehung auf andere Zerlegungen, die noch Einzen oder Nullen enthalten, als Reduction die in 3, b) erwähnten Regeln I) bis X) zur Anwendung. Denkt man sich dann bei einem in $\mathfrak{m}$ gleiche Teile τ geteilten Kreise K jeden folgenden Teilpunkt mit doppeltso großem Werte belastet wie den vorhergehenden und rechnet man diejenigen Punkte, die der Reihe nach $a, b, c \ldots$ Teile τ begrenzen, positiv oder negativ, je nach dem man von dem Innen- oder Außenraum des Kreises aus an sie gelangt unter der Bedingung, daß man die Peripherie K vor jedem markierten Elemente überschreitet, so können die einzelnen Zerlegungen als Symbole für den Inbegriff von je $2\mathfrak{m}$ Werthen dienen, denn es konnte in jedem der $\mathfrak{m}$ Teilpunkte mit der Belastung ± 1 begonnen werden. Da nun bei einer ungeraden Anzahl markierter Elemente schließlich: $2^{\mathfrak{m}} \equiv -1 \mod p$ sein müßte und in der That $p = 2^{\mathfrak{m}} + 1$ ist, so kann die Multiplication[1]) zweier Symbole: $(a, b, c \ldots)$ mit $(\alpha, \beta, \ldots)$ ausgeführt werden und kommt auf eine successive Drehung um die Teile α, β, etc. in der Peripherie K hinaus. Man zerlege $a, b, c \ldots$ derart in Summanden (Summand Null nicht ausgeschlossen), daß zuerst α abgetrennt erscheint und daß doch, wie durch Punkte angedeutet, die Summen der Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Reihe nach wieder $a, b, c \ldots$ sind. Nach der Reduction (der Anfang muß jedoch intact bleiben), trenne man β ab, und sofort bis zum v o r l e t z t e n Element inclusive, so liefert die letzte vollständige Reduction das resultierende Symbol; z. B. (4, 2, 2) mit (3, 2, 3). Wird 3 am Anfange abgesondert, so: 1, 2, 1·, 1, 1·, 2; reduciert in 1, 2, 4, 1; wird nun 2 abgesondert, so erhält man 1, 3· 1, 1· 0, 1 1 reduciert (5 3) als Resultat.

Es können nun die ϑ Symbole der Art in Abtheilungen gebracht werden, daß irgend ein Symbol der K^{ten} Abteilung mit einem der früheren Abteilungen multipliciert, ein Symbol derselben K^{ten} Abteilung bildet [so daß man die ersten K Abteilugen zusammen als „Untergruppe" bezeichnen dürfte].

Die letzte Abteilung umfaßt $\frac{\vartheta}{2}$ Symbole, die vorletzte $\frac{\vartheta}{4}$ Symbole, nämlich die Quadrate[2]) der Symbole der vorigen Abteilung; etc. ... Die 3te Abteilung besteht aus 2 Quadraten. Jedes von diesen quadriert, giebt dasselbe, nämlich: das eine Symbol: $\left(\frac{\mathfrak{m}}{2}, \frac{\mathfrak{m}}{2}\right)$, das die zweite Abteilung II bildet. Wird dies nochmals

1) Die congruent modulo p zu verstehen ist.

2) Stets congruent modulo p verstanden, was ja schon in der Multiplication der Symbole inbegriffen war.

quadriert, so resultiert: $(\mathfrak{m})$ und dies ist dann die erste Abteilung I. Die Multiplication mit $(\mathfrak{m})$ läßt daher jedes Symbol unverändert. Für $\mu = 3$, $\varepsilon = 115$ ist die Anordnung der Symbole in Abteilungen folgende:

h'' \ $h' =$	0	8	2	10
0	8 (I)	44 (II)	422	332 (IV)
4	332	422 (III)	53	422
1	323	332	2222	62 (V)
5	2222	62	53	422.

Wir ordnen jetzt die letzte Abteilung dem freien Gliede der einen quadratischen Gleichung in Ordnung $\nu = 1$ zu; vgl. 3).

Die vorletzte den freien Gliedern der beiden quadratischen Gleichungen in Ordnung $\nu = 2$ etc.

Die 2. Abteilung II, also $\left(\frac{\mathfrak{m}}{2}, \frac{\mathfrak{m}}{2}\right)$ den $\frac{\vartheta}{2}$ quadratischen Gleichungen in der Ordnung $\nu = \mathfrak{m} - \mu - 1$. Das Symbol $(\mathfrak{m})$ aber bleibt für die noch übrigen quadratischen Gleichungen, an Zahl: $\vartheta + 2\vartheta + 4\vartheta + \cdots \mathfrak{m}\vartheta$. Da die einzelne Periode in dem freien Gliede, (wie hier als bekannt vorausgesetzt werden muß), die Nummer: $\varepsilon^k.\left((\varepsilon^{2^{\nu-1}})^{2\lambda-1}+1\right)$ hat[1], so wird man also jede Ziffer der zu einer Serie quadratischer Gleichungen gehörenden Symbole in zwei Summanden (Summand: Null nicht ausgeschlossen) zu zerlegen und das Symbol nach den Regeln I) bis X) zu reducieren haben, um in: $h = h' + h''$ einen Exponenten zu erhalten, der im Index: ε^{k+h} betreffender Perioden vorkommt. Es dürfen Vielfache der Anzahl quadratischer Gleichungen, die die Serie enthält, bei der Zahl h fortgelassen werden. Da man die quadratischen Gleichungen der ersten Ordnungen durch Vermittlung der $\overset{\nu}{e}_k$ als aufgelöst betrachten kann, so braucht man die zu diesen Serien gehörenden Symbole nicht zu zerlegen und das sind bei weitem die meisten! Auch von den übrigen Symbolen, die zu einer Serie

1) Man kann in der Klammer leicht eine Differenz der Quadrate einführen und dies zur Controle benutzen vgl. unten die Rubrik: S. (Summen . . .).

gehören, darf die Hälfte fortgelassen werden[1]), dafür muß aber mit Rücksicht auf die Marke in doppelter Art zerlegt werden[2]).

Z. B. 5 in 3, 2 und 3, 2. [$- \cdot - = +$]

Im Falle $\mu = 3$, also beim 257-Eck bleiben z. B. nur die Symbole (4, 4) und (8) zur Zerlegung übrig, alles andere ist bereits in den allgemeinen Formeln enthalten; vgl. 7).

Führen wir dies in Bezug auf (4, 4) durch, so sind folgende Zerlegungen zu bilden, gehörig zu den 8 quadratischen Gleichungen der Ordnung $\nu = 4$.

(4, 4)	reduciert	$h' + h'' \equiv h \bmod 8$		S. [Summen zur Bildung von $(\eta)^2$]		
2, 2, 4	4, 2, 2	2	2	$2+6=8\equiv 0$	$0+11=11\equiv 3$	
1, 3, 4	4, 2, 2	15	7	$7+0=7$	$(11+\vartheta=27)$	$27+13=40\equiv 0$ modulo 8.
4, 4, 0	5, 3	6	6	$6+0=6$	$7+6=13\equiv 5$	
4, 3, 1	3, 3, 2	4	4	$4+7=11\equiv 3$		
4, 2, 2	4, 2, 2	15	7			
4, 1, 3	4, 4	8	0			
4 0 4	8	0	0			
3 1 4	5, 3	6	6			

Aus der Rubrik: h ist zu entnehmen, wie oft ein gegebenes h [als Indexzuwachs] im freien Gliede: F der quadratischen Gleichung vorkommt, etwa: $\mathfrak{C}_h$ mal. Da nun die Diskriminante: $\eta^2 - 4F$ ist, muß noch die in 3a) angedeutete Vereinfachung von η^2 angewandt werden. Dazu dient die Rubrik: S [zugleich zur Controle]. Man hat nämlich folgenden aus der Formel Seite 184 leicht herzuleitenden Satz: Das halbe Quadrat einer Periode $\frac{1}{2}\left(\overset{\nu-1}{\eta}_{\varepsilon^0}\right)^2$ ist $= 2^{2^\mu - \nu} + \frac{1}{2}\left(\overset{\nu-1}{\eta}_{\varepsilon^\vartheta}\right)$ noch vermehrt um die Summe der Perioden in den freien Gliedern derselben quadratischen Gleichung und aller nachfolgenden quadratischen Gleichungen, falls in diesen überall die Ordnungszahl $(\nu - 1)$ gesetzt wird statt der ursprünglich höheren Zahl. Man hat also in der letzten Rubrik S nachzusehn, wie oft ein h vorkommt, etwa $\mathfrak{C}'_h$ mal, dann muß $\overset{\nu}{c}_h = 2\mathfrak{C}_h + 2\mathfrak{C}'_h - 4\mathfrak{C}_h = 2(\mathfrak{C}'_h - \mathfrak{C}_h)$ sein; z. B. $\overset{4}{c}_7 = 2(1-2) = -2$; vgl. 5). Nur bei $h = \vartheta$ resp. $h \equiv \vartheta$ [modulo der Anzahl $\equiv 0$ der in der betreffenden Serie vorhandenen quadratischen Gleichungen] hat man noch den Wert von c um 1 zu erhöhen.

1) Nicht bei ($\mathfrak{m}$) und: $\left(\frac{\mathfrak{m}}{2}, \frac{\mathfrak{m}}{2}\right)$; hier vgl. Beispiel: (4, 4).

2) Zerlegt man z. B. 3 3 2 oder 4 2 2 so erhält man beide Male dasselbe Resultat, nämlich: $\mathfrak{C}_0 = 2$; $\mathfrak{C}_1 = 5$; $\mathfrak{C}_2 = 4$; $\mathfrak{C}_3 = 5$.

In analoger Weise ist der Fall $\mu = 4$ behandelt.

Die Tafel der Symbole (Seite 184) ersetzt also eine viel umfangreichere Indextabelle.

9) Inhalt des in der math. Sammlung zu Göttingen deponierten Diariums über den vorliegenden Gegenstand [beendet 1889]:

I) Die ursprüngliche Indextabelle . . Pag. 11—73.

Es ist damit zugleich eine Indexsummentabelle verbunden derart, daß $\operatorname{ind}\alpha + \operatorname{ind}(\alpha+1)$ aus den Zwischenzeilen entnommen werden kann. Hiedurch: Ermittelung der Grundzahlen $\overset{\nu}{e}_k$. Pag. 75—85 und 88 d).

II) Die symbolisch verküzte Indextabelle.

Zerlegung der Zahl **16** in 2048 Symbole. Aufstellung der quadratischen Gleichungen . . . . Pag. 1—8.

III) Die numerische Ausrechnung der quadratischen Gleichungen bis zur 7. Ordnung . . . . . . Pag. 87—88 b).

IV) Die trigonometrische Berechnung aller Perioden $\overset{\nu}{\eta}$ Pag. 100—215.

Zusammenstellung der Vorzeichen (z_{11490}) . . . Pag. 97.

Hilfstabelle enthaltend: $\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)$ . . . . . Pag. 95—95_s).

V) Verallgemeinerung für beliebiges μ und erläuternder Text . . . . Pag. I bis pag. 56, [indem schon genannte Seiten zu überspringen sind]. Derselbe bricht bei der Umformung der Determinante der 7. Ordnung pag. 50 ab.

VI) Dazwischen sind entsprechende Formeln für die Fälle $\mu = 0$ bis $\mu = 3$ eingeschaltet.

a) Construction des regulären 17-Ecks . Pag. 8 a).

b) Das vervollständigte 15-Eck . . . . . Pag. 10 a).

c) Zeichen der $\sqrt{}$ für sämmtliche primitive Wurzeln zu $p = 257$ . . . . Pag. 99 a).

d) 2 Tafeln zum allgemeinen quadr. Reciprocitätsgesetz.

Lingen, den 23. April 1894.

Über die geologische Kartirung des südlichen Hannover.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1894.

Es wurden vorgelegt die jetzt fertig gedruckten Blätter Göttingen, Reinhausen, Waake und Gelliehausen nebst den Erläuterungen dazu, von welchen die zu Blatt Göttingen über $3^1/_2$ Druckbogen stark sind und eine Reihe von Notizen über den Untergrund von Göttingen und seiner Umgebung sowie Listen der organischen Reste enthalten. In Grenzstich-Correkturen lagen auch schon die Blätter Nörten, Lindau und Moringen vor, während die Blätter Westerhof und Gandersheim noch nicht so weit in der Ausführung vorgeschritten sind.

Wenn nun auch für sehr ausgedehnte Gebiete zwischen dem Thüringer Wald, Harz, Wesergebirge und dem Main geologische Specialkarten noch fehlen, so zeigen doch schon die hier vorgelegten Blätter sehr klar, wie zwischen geologisch eintönigen, anscheinend oder scheinbar ungestörten Gebirgsmassen der Trias einzelne Züge von Bruchlinien in verschiedenen Richtungen hindurchsetzen und dann mehr oder minder breite Thäler sowohl, als auch mehr oder minder lange Bergrücken bedingen, welche aus steiler geneigten Schichten festerer Gesteine bestehen.

Als Horste oder geologische Inseln sind zwischen den meist um mehrere Hundert Meter eingesunkenen Schollen jüngerer Gesteine mehr oder minder grosse Gebirgsmassen, besonders von mittlerem Buntsandstein, stehen geblieben, und von ihrer Oberfläche sind die ursprünglich über ihnen liegenden jüngeren Schichten fortgespült worden.

Als Inseln haben aber diese Buntsandstein-Massen vielfach aus den Gewässern hervorgeragt, welche den Lösslehm ringsum ablagerten, stellenweise in einer Höhe von mehr als 60 m über

den jetzigen Thalsohlen, und wie Inseln ragen sie denn auch gar häufig aus dem Lehm hervor.

Geologisch ganz verschieden sind von ihnen aber inselartige oder rückenförmige Erhebungen des oberen Jura, der oberen Kreide etc., welche nördlich von Göttingen auf dem Kahlberge bei Echte, dem Selter, dem Ith, dem Hils und den Sieben Bergen bei Alfeld zum Theil ähnliche Gebirgsformen wie die der Trias haben, aber selbst schon tief eingesunken sind, zum Theil um weit über 1000 m, und nur deshalb als Berge hervorragen, weil diese jüngeren Schichtenfolgen weder vor noch nach ihrer Einsenkung durch das Wasser abgetragen worden sind; andernfalls würden sich an ihrer Stelle tiefe Einsenkungen finden, wie der Seeburger See und der Denkershäuser Teich.

Voraussichtlich würden auf diesen verschiedenartigen Bergrücken und vielleicht auch in den breiteren Thaleinsenkungen, wie im Leinethal, Pendelmessungen zunächst Aussicht auf deutlich wahrnehmbare Differenzen eröffnen können.

Zum Studium des elektrischen Resonators.

Von

P. Drude.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 23. Juni 1894.

Theoretischer Theil.

Einleitung.

Hertz hat uns in dem elektrischen Resonator ein Mittel in die Hand gegeben, durch welches man die Intensität eines elektrischen Feldes von sehr hoher Wechselzahl topographisch ausmessen kann. Da ein elektrisches Wechselfeld auch stets ein magnetisches Feld von gleicher Wechselzahl hervorruft, so kann man mit Hülfe des Resonators auch magnetische Wechselfelder untersuchen. Zu dem Zwecke müssen die magnetischen Kraftlinien die von dem Resonator umrandete Fläche durchsetzen, oder, was dasselbe besagt, die Drahtleitung des Resonators umschlingen. Man kann in diesem Falle, durch Anwendung rein geometrischer Betrachtungen, Lagen des Resonators angeben, in welchen seine elektrische Erregung nur durch die Umschlingung der magnetischen Kraftlinien hervorgerufen wird. Man kann dann sagen, daß der Resonator auf die magnetische Kraft allein reagire, um diese Lagen zu unterscheiden von denjenigen, in welchen eine elektrische Erregung des Resonators wahrgenommmen wird, ohne daß magnetische Kraftlinien die Resonatorleitung umschlingen. In letzteren Lagen reagirt daher der Resonator allein auf die elektrische Kraft. Es mag aber hervorgehoben werden, daß der Ausspruch: „der Resonator reagirt auf die magnetische Kraft“, lediglich eine Abkürzung ist, die deshalb zweckmäßig ist, weil man durch einen, in der betreffenden Lage gehaltenen Resonator thatsächlich das Verhalten des Mittelwerthes der magnetischen Kraft innerhalb

der vom Resonator umrandeten Fläche untersuchen kann, dagegen wird in Wirklichkeit eine elektrische Erregung des Resonators, d. h. Potentialschwankungen oder Funkenbildung an seiner Unterbrechungsstelle, oder Bildung von Wechselströmen in seiner Leitung, nur durch elektrische Kräfte, welche in der Resonatorleitung existiren, hervorgebracht.

Bei der Untersuchung des elektromagnetischen Feldes eines Lecher'schen Drahtsystemes fiel es mir nun auf, daß einige Resonatoren auf die elektrische Kraft stets viel schwächer reagirten, als auf die magnetische Kraft, während dieselben Resonatoren einen solchen Unterschied hinsichtlich ihrer Reaktionsfähigkeit auf die elektrische, bezw. magnetische Kraft nicht erkennen ließen, wenn man sie in das elektro-magnetische Feld ebener Luftwellen brachte, wie es durch einen Hertz'schen Hohlspiegelerreger hervorzurufen ist. Um Rechenschaft von diesen Erscheinungen zu erhalten, soll die im Folgenden zu entwickelnde Theorie des Resonators dienen. Wie ich in dem zweiten „experimentellen Theil“ der Arbeit mittheilen werde, habe ich eine gute Bestätigung dieser Theorie erhalten.

Mit einer Theorie des Resonators haben sich meines Wissens bisher nur Hertz[1]) und H. Poincaré[2]) beschäftigt.

Hertz führt die Theorie nicht soweit durch, um die hier aufgeworfene Frage beantworten zu können. Außerdem leiden seine Entwickelungen an dem Uebelstand, daß sich nach ihnen an dem Punkte der Resonatorleitung, welcher seiner Unterbrechungsstelle gegenüber liegt, ein Schwingungsknoten der Stromwelle ausbilden müßte, während für die Grundschwingung unzweifelhaft dort ein Schwingungsbauch der Stromwelle liegt.

In den an erster Stelle genannten Vorlesungen ist Poincaré zu einem zweifelhaften Resultat hinsichtlich der Beantwortung der Frage gekommen, ob der Resonator mehr auf die elektrische Kraft an dem Orte seiner Unterbrechungsstelle reagire, oder mehr auf diejenige elektrische Kraft, welche an dem der Unterbrechungsstelle gegenüber liegenden Punkte der Resonatorleitung besteht.

Hinsichtlich dieser Frage ist Hertz durchaus letzterer Meinung. Für die Berechtigung seiner Ansicht sprechen nicht nur theoretische Gründe, sondern auch einfache, zwingende, experimentelle Ergebnisse, die ich im II. Theil dieser Arbeit anführen werde.

---

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34, pag. 157, 1888.

2) H. Poincaré, Elektricität und Optik, deutsch von Jäger und Gumlich. II. Bd., pag. 164, Kap. X. — Les Oscillations électriques, Paris 1894, p. 220 u. ff.

In den jetzt erschienenen Vorlesungen von Poincaré gelangt dieser Autor ebenfalls zu dem Resultate von Hertz. Diese Vorlesungen sind erst erschienen, nachdem ich vorliegende Arbeit beendet hatte, deren Publikation nur durch die Anstellung der Versuche, durch welche ich die Theorie bestätigen wollte, verzögert ist. Meine Darstellung hat manche Berührungspunkte mit der von Poincaré, trotzdem glaubte ich meine beabsichtigte Publikation auch des theoretischen Theiles nicht zurückziehen zu sollen, da Poincaré die Theorie nicht bis zur Discussion der hier aufgeworfenen Fragen durchführt, und da ich, wie ich glaube, eine einfachere Ableitung der Ausgangs-Gleichungen gebe. Ausserdem scheinen mir bei Poincaré die zwei springenden Punkte, deren Erfüllung erst die Theorie des Resonators sehr einfach gestaltet, nicht genügend hervorgehoben bezw. genannt zu sein. Ferner bestehen zwischen unserer Darstellung der Grundgleichungen noch einige Differenzen, welche ich unten an den betreffenden Stellen nennen werde.

Grundgleichungen der Theorie.

Kirchhoff[1]) hat nachgewiesen, daß elektrische Wellen längs eines Metalldrahtes, welcher in Luft lagert, sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzen müssen, wobei c das Verhältniß einer nach elektrostatischem Maaß gemessenen Elektricitätsmenge zu der nach elektromagnetischem Maaß gemessenen bezeichnet. Dieses Resultat, welches Kirchhoff allein durch Anknüpfung an die im Drahte selber stattfindenden Vorgänge gewonnen hat, bleibt auch bestehen, wenn man an die Vorgänge im elektromagnetischen Felde der Umgebung (Luft) des Drahtes anknüpft, indem man die dort nach der Maxwell'schen Theorie bestehenden Gleichungen integrirt[2]). Aber es gilt jenes Kirchhoff'sche Resultat nur unter zwei Voraussetzungen:

1) Der galvanische Widerstand der Leitung muß zu vernachlässigen sein gegen $2cL$, wobei L den Koefficienten der Selbstinduktion der Längeneinheit des Drahtes bezeichnet. — In diesem Falle treffen nämlich die elektrischen Kraftlinien in der Luft senkrecht auf die Drahtoberfläche, sodaß die in der Luft stattfindenden Verschiebungsströme, welche allemal eine elektrische Ladungswelle

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 121, 1864.

2) Betreffs des ausführlicheren Beweises dieser und der nachfolgenden Behauptungen verweise ich auf Drude, Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage. Stuttgart 1894, pag. 447 u. ff.

des Drahtes begleiten müssen, senkrecht verlaufen zu der Richtung der Leitungsströme im Drahte. Die Selbstinduktion desselben berechnet sich daher genau so, als ob nur Leitungsströme im Drahte selbst vorhanden wären, ohne Begleitung von Verschiebungsströmen in der Luft.

2) Die Selbstinduktion der Längeneinheit des Drahtes muß gleich sein dem reciproken Werth seiner nach elektrostatischem Maaß gemessenen Kapacität pro Längeneinheit.

Die erste dieser beiden Voraussetzungen ist immer erfüllt, wenn man mit Metallleitungen experimentirt, welche nicht allzu dünn (dünner als Bruchtheile eines mm) und nicht allzu lang (länger als 100 m) sind. Die Voraussetzung ist also bei Benutzung elektrischer Resonatoren, selbst wenn sie aus Eisendraht[1]) bestehen sollten, erfüllt, dagegen nicht mehr bei Benutzung langer Telegraphenlinien.

Die zweite der Voraussetzungen gilt nur für gewisse Gestalten der Drahtleitung, z.B. für zwei Paralleldrähte (Lecher'sches Drahtsystem) in welchen in gegenüberliegenden Punkten entgegen gerichtete Ströme fließen. Für eine schraubenförmig gewundene Leitung würde diese Voraussetzung nicht mehr zutreffen.

Für ein System von Paralleldrähten vom Radius R und dem gegenseitigen Abstand d hat der Koefficient L der Selbstinduktion[2]) der Längeneinheit den Werth

$$L = 2 \lg \text{nat} \frac{d}{R}. \tag{1}$$

Da in den meisten Fällen d viel größer wie R ist, so variirt L nur sehr wenig, wenn das Drahtsystem von einer genauen Parallelität abweicht, d. h. wenn d etwas schwankt. So ist für $R = 1$ mm, $d = 100$ mm, lg nat $d/R = 4{,}6$; dagegen für $d = 90$ mm : lg nat $d/R = 4{,}5$. L schwankt also etwa nur um 2 %, wenn d um 10 % schwankt. Da eine Verringerung der Selbstinduktion durch gegenseitige Annäherung der Drähte allemal von einer Vergrößerung ihrer Kapacität begleitet sein muß, so werden wir daher mit großer

1) Für diesen ist nämlich der galvanische Widerstand bei schnellen Schwingungen sehr hoch, da diese wegen der hohen Magnetisirungskonstante des Eisens sich sehr dicht an die Oberfläche des Eisendrahtes drängen.

2) Genauer genommen ist unter L zu verstehen die Induktionswirkung auf eine Stromfaser in der Oberfläche des Drahtes, da schnelle Stromschwankungen wesentlich nur nahe der Drahtoberfläche verlaufen. Vgl. dazu J. Stefan, Wied. Ann. 41, pag. 421, 1890, und das citirte Buch des Verf., pag. 367.

Annäherung die Voraussetzung 2), welche streng für Paralleldrähte gilt, auch auf anders gestaltete Drahtleitungen anwenden können, z. B. auf einen kreisförmigen oder rechteckigen Resonater.

Wir können nun die Grundgleichungen der Theorie leicht aufstellen. Nennt man j die Stromdichte in der Oberflächenschicht des Drahtes, in welcher die Stromschwankungen stattfinden, σ die specifische Leitfähigkeit des Drahtes, so muß nach dem Ohm'schen Gesetze der Quotient $j:\sigma$ gleich der gesammten, pro Längeneinheit des Drahtes in seiner Oberfläche wirkenden elektrischen Kraft sein, wobei diese nach elektromagnetischem Maaße zu messen ist. Diese Kraft setzt sich im Allgemeinen aus vier Theilen zusammen:

1) aus der Selbstinduktion $-2\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial J}{\partial t}$, falls J die Stromstärke (nach elektromagnetischem Maaß) an der betrachteten Stelle des Drahtes ist, t die Zeit bedeutet;

2) aus der von der Ladung des Drahtes, d. h. von den, seine Oberfläche schneidenden, elektrischen Kraftlinien herrührenden Kraft. Nennt man $\mathfrak{e}$ die elektrische Ladung der Längeneinheit des Drahtes (nach elektrostatischem Maaß gemessen), ferner V das (elektrostatisch gemessene) Potential, so ist

$$V = \mathfrak{e}\cdot 2\lg\frac{d}{R},$$

weil die reciproke Kapacität der Längeneinheit gleich ist dem Koefficienten L der Selbstinduktion (nach Vorraussetzung 2). Die elektrische Kraft in der Richtung der Axe s des Drahtes (welche sich stetig aus dem Luftraum in das Drahtinnere fortsetzen muß) ist also nach elektrostatischem Maaß: $-\frac{\partial V}{\partial s}$, folglich nach elektromagnetischem Maaß:

$$-c\frac{\partial V}{\partial s} = -2\lg\frac{d}{R}\cdot c\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s}.$$

3) aus der, durch das äußere elektrische Feld, in welches man den Resonator hineinbringt, in ihm längs seiner Axenrichtung herrschenden Kraft S;

4) aus einer elektrischen Zusatzkraft S', deren Einführung dann nothwendig sein kann, wenn bestimmte Stellen der Resonatorleitung, z. B. ihre Enden, oder ihre Mitte, gewissen Bedingungen für alle Werthe der Zeit unterworfen werden[1]). Diese Zusatzkraft

1) Diese Zusatzkraft fehlt bei Poincaré.

S' tritt in Analogie mit den mechanischen Zusatz-(Druck-)Kräften, welche bei der Bewegung eines auf vorgeschriebener Fläche oder Bahn beweglichen Punktes auftreten.

Durch Summation der unter 1) 2) 3) 4) aufgeführten Terme erhält man aus dem Ohm'schen Gesetz:

$$\text{2)} \qquad \frac{j}{\sigma} = -2\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial J}{\partial t} - 2c\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial e}{\partial s} + S + S'.$$

Weil die, die Ladung e veranlassenden elektrischen Kraftlinien nur durch einen Austritt der elektrischen Stromlinien aus dem Drahte erzeugt sein können, d. h. durch eine Aenderung der Stromstärke längs der Axe s des Drahtes, so besteht die leicht abzuleitende Beziehung:

$$\text{3)} \qquad \frac{\partial J}{\partial s} = -\frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Dabei ist J positiv gerechnet in der positiven Richtung von s. Der Faktor $1/c$ tritt in der Gleichung 3) auf, weil J elektromagnetisch, e elektrostatisch gemessen ist.

Wie nun auf pag. 191 gesagt ist, hat der galvanische Widerstand des Resonators keinen Einfluß auf die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der längs des Resonators gleitenden elektrischen Wellen, und daher auch keinen Einfluß auf die Perioden seiner Eigenschwingungen. Für Bestimmung der letzteren ist also σ in Gleichung 2) gleich ∞ zu setzen.

Die Endlichkeit von σ bewirkt nur eine gewisse Dämpfung der Wellen. Ferner bewirkt sie, daß die Strömung J im Resonator einer äußeren, periodisch ungedämpft wirkenden Kraft S allemal nur bis zu einem endlichen Grade folgt, während J beliebig groß werden würde, falls die Leitfähigkeit σ unendlich groß wäre, und falls S mit der Dauer einer Eigenschwingung des Resonators zusammenfiele. Dieses Resultat entsteht analytisch dadurch, daß in diesem Falle J ein mit t proportionales Glied enthält. Nennt man den Proportionalitätsfaktor C, so richtet sich in Wirklichkeit, wo J wegen der endlichen Leitfähigkeit σ stets endlich bleibt, die Stärke des Ansprechens des Resonators offenbar nach diesem Faktor C und seiner Leitfähigkeit σ. Bei Benutzung ein und desselben Resonators kann man die Stärke seines Ansprechens in verschiedenen Lagen aber allein aus dem Faktor C beurtheilen, denn da der galvanische Widerstand des Resonators (bei Anwendung konstanter Wechselzahlen) konstant bleibt, so muß die Stärke seines Ansprechens in derselben Stufenfolge variiren, wie jener

Faktor C, der streng genommen das Ansprechen des Resonators nur für unendliche Leitfähigkeit desselben ausdrückt.

Für die, uns hier zunächst interessirenden Fragen[1]) können wir daher σ gleich ∞ annehmen[2]). Durch Elimination von e gewinnt man dann aus 2) und 3):

$$4)\qquad \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 J}{\partial s^2} + \frac{1}{2\lg\frac{d}{R}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial t}\right).$$

Hierin bezeichnet d den mittleren Abstand derjenigen Punkte der Resonatorleitung von einander, in welchen zu jedem Zeitmoment entgegengerichtete Stromstärken fließen. Auf die Kenntniß dieser Größe, sowie überhaupt des Faktors $\lg d/R$, kommt es hier nicht an, da derselbe bei Anwendung derselben Leitung immer derselbe bleibt. Jener Faktor hat nur insofern Interesse, weil aus der Gleichung 4) hervorgeht, daß der Einfluß der äußeren Kraft S um so größer ist, d. h. der Resonator um so besser anspricht, je kleiner $d:R$, d. h. je dicker die Resonatorleitung ist, wenn man die Gestaltung des Resonators, also die Größe d, unveränderlich annimmt.

Daß ein dicker Resonator besser ansprechen muß, als ein dünner, ergiebt sich auch schon daraus, daß für ersteren der galvanische Widerstand und daher auch die Dämpfung der Wellen geringer ist, als für letzteren. Diese Betrachtungen lehren also, daß aus zwei Gründen eine dicke Resonatorleitung zweckmäßig ist. Der hier aus der Gleichung 4) abgeleitete Grund tritt in Analogie mit der Erscheinung in der Mechanik, daß ein leichtes schwingungsfähiges System, welches eine geringe Masse (Trägheit) besitzt, empfindlicher auf eine äußere Kraft reagirt, als ein schweres.

Wir wollen nun annehmen, der Resonator bestehe aus einem zusammenhängenden Drahte der Länge l', dessen Enden nahe zusammengebogen sind, sodaß zwischen ihnen eine kurze „Unterbrechungsstelle" besteht. Wenn die Enden einer Drahtleitung keine Kapacität besitzen (wenn sie in unendlich feine Spitzen auslaufen), so muß die Stromstärke J an den Enden dauernd gleich

1) Die Dämpfung der Resonatorschwingungen soll weiter unten behandelt werden.

2) Es geschieht dies nur aus Bequemlichkeitsrücksichten. Die Rechnungen wären auch mit endlichem σ durchführbar. Es erfordert dies aber eine complicirte Untersuchung über das Verhältniß zwischen j und i in Gleichung 2), da j nicht gleich $i:q$ ist, falls q den Drahtquerschnitt bezeichnet.

Null sein, d. h. die Enden sind Knotenpunkte der Stromwelle. Für die Grundschwingung ist daher die Länge l' der Leitung gleich einer halben Wellenlänge, und die Dauer dieser Eigenschwingung ist $T = 2l' : c$. — In Wirklichkeit besitzen aber stets die Enden der Resonatorleitung eine endliche Kapacität, sodaß die halbe Wellenlänge der Grundschwingung größer als l' ist. Wir können aber die endliche Kapacität der Enden der Resonatorleitung dadurch ersetzen, daß wir gewisse Zusatzstücke an die Drahtenden angesetzt denken, welche ohne Kapacität endigen, sodaß die Länge l dieser gedachten Resonatorleitung größer ist, als die Länge l' der wirklichen Leitung. l ist dann genau gleich einer halben Wellenlänge.

Die Differenz $l - l'$, d. h. die Länge der Zusatz-Draht-Stücke, ist aus der Kapacität der Resonatorenden zu berechnen. Wir brauchen uns aber zunächst um diese Beziehung nicht zu kümmern. Wir setzen jetzt also nur voraus, daß der Resonator die Länge l besitze, und daß an seinen Enden Knotenpunkte der Stromwellen liegen.

Wie die Gleichung 3) lehrt, ist ein Knoten der Stromwelle ein Bauch der Ladungswelle. Die Enden der Resonatorleitung besitzen also erhebliche Potentialdifferenzen. Diese können sich eventuell bis zu einem Funkendurchbruch der Unterbrechungsstelle steigern. In diesem Momente steht die Resonatorleitung unter wesentlich anderen Bedingungen, da der Funke eine leitende Verbindung zwischen den Resonatorenden herstellt. Die Grundschwingung des Resonators wird dadurch doppelt so schnell, die Resonanz mit der äußeren Kraft hört deshalb auf, das Funkenspiel muß daher ebenfalls sehr schnell wieder erlöschen, um für eine kurze Zeit von Neuem wieder einzusetzen, wenn die Potentialschwankung an der Unterbrechungsstelle genügend hoch geworden ist. — Wenn wir also im Folgenden einen Schwingungsknoten an den Enden der Resonatorleitung annehmen, so gilt dieses nicht für die allerdings stets sehr kurzen (oder auch durch Vergrößerung der Unterbrechungsstelle ganz zu vermeidenden) Zeitmomente, in welchen ein Sekundär-Funken besteht.

Man kann jede beliebige äußere Kraft S in Form der Fourierschen Reihe darstellen:

$$5)\qquad S = a_1 \sin\frac{\pi s}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi s}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi s}{l} + \cdots,$$

wobei ist

$$6)\qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l S \sin\frac{n\pi s}{l}\, ds.$$

In eine ähnliche Reihenentwickelung läßt sich die Stromstärke J im Resonator bringen, und zwar gilt diese Darstellung von J auch noch an den Enden der Leitung selbst, d. h. für $s = 0$ und $s = l$, weil dort J verschwinden muß. Falls äußere Kräfte fehlen, würde das Integral der Gleichung 4) daher sein:

7) $$J = b_1 e^{i\frac{t}{\tau}} \sin\frac{\pi s}{l} + b_2 e^{2i\frac{t}{\tau}} \sin\frac{2\pi s}{l} + b_3 e^{3i\frac{t}{\tau}} \sin\frac{3\pi s}{l} + \cdots,$$

wobei sein muß

8) $$\frac{1}{\tau} = \frac{c\pi}{l}.$$

i bedeutet die imaginäre Einheit. Setzt man daher

9) $$T = 2\pi\tau = 2l : c,$$

so bedeutet T die Dauer der langsamsten Eigenschwingung (Grundschwingung) des Resonators.

Ist eine äußere Kraft S vorhanden, und ist dieselbe eine ungedämpfte periodische Funktion nach der Zeit von der Periode T', so enthalten in 5) sowohl S wie die Koefficienten a_n den gemeinsamen Faktor $e^{i\frac{t}{\tau'}}$, wobei $\tau' = T' : 2\pi$ ist.

Wir wollen daher setzen:

10) $$S = f(s) e^{i\frac{t}{\tau'}} = e^{i\frac{t}{\tau'}} \left\{ a_1 \sin\frac{\pi s}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi s}{l} + \cdots \right\},$$

wobei ist

11) $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s) \sin\frac{n\pi s}{l}\, ds.$$

Die Funktion $f(s)$ und daher auch die Koefficienten a_n enthalten die Zeit nicht mehr.

Das allgemeine Integral von 4) wird daher, wenn wir zunächst eine Zusatzkraft S' nicht einführen:

12) $$\begin{aligned} J = {} & b_1 e^{i\frac{t}{\tau}} \sin\frac{\pi s}{l} + b_2 e^{2i\frac{t}{\tau}} \sin\frac{2\pi s}{l} + \cdots \\ & + i \cdot e^{i\frac{t}{\tau'}} \left(d_1 \sin\frac{\pi s}{l} + d_2 \sin\frac{2\pi s}{l} + \cdots \right), \end{aligned}$$

wobei mit Benutzung der Relation 8), sein muß:

$$\left(\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\tau'^2}\right)d_1 = a_1 : 2\tau' \lg d/R,$$

13) $$\left(\frac{4}{\tau^2}-\frac{1}{\tau'^2}\right)d_2 = a_2 : 2\tau' \lg d/R,$$

$$\left(\frac{9}{\tau^2}-\frac{1}{\tau'^2}\right)d_3 = a_3 : 2\tau' \lg d/R, \quad \text{etc.}$$

Eine Zusatzkraft S' ist thatsächlich nicht weiter einzuführen, wenn die Resonatorleitung, überall isolirt, in Luft lagert, da in dem Integral 12) alle Nebenbedingungen des Problems erfüllt sind, daß nämlich $J = 0$ ist für $s = 0$ und $s = l$.

Wenn dagegen, wie es bei manchen Versuchsanordnungen zweckmäßig ist[1]), die Mitte der Resonatorleitung, d. h. der Punkt $s = l/2$, mit der Erde leitend verbunden wird, so ist dort dauernd das Potential V gleich Null. Es liegt also bei $s = l/2$ ein Knoten der Ladungswelle, d. h. ein Bauch der Stromwelle, da nach 3) $\frac{\partial J}{\partial s} = 0$ sein muß. Es verschwinden folglich in 12) die Koefficienten b_n mit gradem Index n; ferner besteht eine Zusatzkraft S', deren Effekt der ist, daß sie die Koefficienten d_n mit gradem Index n in 12) annullirt, während sie die Koefficienten d_n mit ungradem Index n unverändert läßt. Letzteres ist deshalb nothwendig, weil sonst die Zusatzkraft S' zur Bildung des Stromes J Arbeit leisten würde, was nicht stattfinden darf.

Wenn man die äußere Kraft S kennt, d. h. die Funktion $f(s)$, so sind nach 11) die Koefficienten a_n zu berechnen, und daher nach 13) die Koefficienten d_n, d. h. der erzwungene Schwingungszustand im Resonator. Ist $\tau' > \tau$, d. h. erfolgt die erzwungene Schwingung langsamer als die Grundschwingung des Resonators, so sind nach 13) alle Koefficienten d von demselben Vorzeichen, wie die Koefficienten a. Da die erzwungene Schwingung von J nach 12) den Faktor i enthält, der eine Phasenbeschleunigung um 90° ausdrückt, so liegt also die erzwungene Stromwelle um 90° an Phase voran vor der äußeren elektrischen Kraft, wenn deren Periode langsamer erfolgt, als es der Resonanz entspricht.

Nach den Gleichungen 13) ist das Verhältniß $d_n : a_n$ um so kleiner, je größer n ist. Die einfachste Schwingungsform des Re-

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 52, pag. 499, 1894.

sonators, bei welcher sich nur zwei Knoten (an seinen Enden) ausbilden, wird daher am kräftigsten durch die erzwungene Kraft erregt. Für diese einfachste Schwingung ist nach 13) und 11):

14) $$d_1 = p \cdot \int_0^l f(s) \sin \frac{\pi s}{l} ds,$$

wobei p einen positiven Werth bezeichnet. Das Integral in 14) lehrt, daß der äußeren elektrischen Kraft $f(s)$ hinsichtlich ihres Einflusses auf die erzwungene Schwingung ein Gewicht proportional zu $\sin \frac{\pi s}{l}$ beizulegen ist. Dieses Gewicht ist daher am größten in der Mitte der Resonatorleitung (für $s = l/2$), und verschwindet an den Enden derselben. Der Resonator reagirt daher vorzugsweise auf die elektrische Kraft an der Mitte seiner Leitung, dagegen garnicht (oder nur kaum merklich, weil l' nicht genau identisch mit l ist) auf die elektrische Kraft am Orte seiner Unterbrechungsstelle.

Hinsichtlich der Phase der Stromwelle werden die Resultate etwas complicirter, wenn $\tau' < \tau$ wird. Man gewinnt aus 13) und 12) unmittelbar den Satz, daß die erzwungene Stromwelle um 90^0 an Phase zurückliegt hinter der äußeren elektrischen Kraft, wenn deren Periode schneller ist, als selbst die der Oberschwingungen des Resonators.

Wenn dagegen die Periode der äußeren Kraft zwischen der Grundschwingung und einer Oberschwingung liegt, so können die Phasen der Stromwellen in den verschiedenen Schwingungsformen nach der Knotenzahl verschieden sein. Diejenige Schwingungsform wird am kräftigsten angeregt, deren Eigenschwingungsdauer am nächsten zusammenfällt mit der Periode der äußeren Kraft.

Ist dieses Zusammenfallen ein genaues, d. h. ist $\tau' = \tau : n$, wobei n eine ganze Zahl ist, so würde nach 13) d_n unendlich groß werden. In diesem Falle ist daher J in der Gestalt des Integrals 12) nicht brauchbar[1]); vielmehr ist dann:

15) $$\begin{aligned} J = C \cdot t \cdot e^{i \frac{t}{\tau'}} \sin \frac{n\pi s}{l} + b_1 e^{i \frac{t}{\tau}} \sin \frac{\pi s}{l} + b_2 e^{2i \frac{t}{\tau}} \sin \frac{2\pi s}{l} + \cdots \\ + i e^{i \frac{t}{\tau'}} \left(d_1 \sin \frac{\pi s}{l} + d_2 \sin \frac{2\pi s}{l} + \cdots \right). \end{aligned}$$

1) Poincaré verwendet stets ein Integral von J in der Gestalt der Formel 7).

Bei den Koefficienten $b_1, b_2 .. d_1, d_2 ..$ kommt die Ordnungszahl n nicht vor. C bestimmt sich aus 4) zu:

16) $$C = a_n : 4 \lg d/R.$$

Wie aus 15) hervorgeht, hat die mit der äußeren Kraft S in Resonanz stehende Stromschwingung dieselbe Phase, wie jene äußere Kraft.

Findet speciell Resonanz mit der Grundschwingung des Resonators statt, wie es bei den Experimenten meistens realisirt wird, so ist $n = 1$ zu setzen. Der Resonator wird daher um so lebhafter ansprechen, je größer der Koefficient a_1, d. h. nach 11), je größer ist

17) $$C' = \int_0^l f(s) \sin \frac{\pi s}{l} ds.$$

Dieses Resultat, welches abgeleitet ist mit Vernachlässigung des galvanischen Widerstandes der Resonatorleitung und unter der Annahme einer ungedämpften äußeren Kraft S, wird nach den Ueberlegungen der pag. bestehen bleiben, auch wenn der Wirklichkeit entsprechend, die Resonatorleitung einen endlichen Widerstand besitzt und die elektrischen Schwingungen des äußeren Feldes an Intensität mit der Zeit einbüßen.

Wie die Diskussion des Integrals C' auf voriger pag. ergab, muß also auch bei wirklicher Resonanz (mit der Grundschwingung) der Resonator wesentlich auf die elektrische Kraft an der Mitte seiner Leitung reagiren, wie Hertz gleichfalls geschlossen hat (vgl. oben pag. 190).

Bisher ist die äußere Kraft S nach 10) in der Form vorausgesetzt:

$$S = f(s) e^{i \frac{t}{\tau'}} = f(s) \left(\cos \frac{t}{\tau'} + i \sin \frac{t}{\tau'} \right).$$

Es ergiebt sich ohne Schwierigkeit, daß, wenn S die Form besitzt:

18) $$S = f_1(s) \cos \frac{t}{\tau'} + f_2(s) \sin \frac{t}{\tau'},$$

dann das von der Resonanz mit der Grundschwingung beeinflußte Glied der Stromstärke die Form besitzt

19) $$J = t \sin \frac{\pi s}{l} \left(C_1 \cos \frac{t}{\tau'} + C_2 \sin \frac{t}{\tau'} \right),$$

wobei ist

20)
$$C_1 . 2l . \lg d/R = \int_0^l f_1(s) . \sin \frac{\pi s}{l} ds,$$
$$C_2 . 2l . \lg d/R = \int_0^l f_2(s) . \sin \frac{\pi s}{l} ds.$$

Nennen wir die Integrale der rechten Seite von 20) C'_1 und C'_2, so hängt also die Amplitude der Resonatorschwingung ab von dem Werthe

21)
$$A = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}.$$

Wenn man die äußere Kraft S als Funktion des Ortes kennt, so kann man daher A berechnen und die gestellte Aufgabe ist gelöst.

Der Resonator im elektromagnetischen Felde ebener Wellen.

Ist die Fortpflanzungsrichtung der Wellen dis positive z-Axe, die Wellenlänge λ, so ist die elektrische Kraft, welche senkrecht gegen die z-Axe gerichtet sein muß.

22)
$$X = M \sin\left(\frac{t}{\tau} - 2\pi \frac{z}{\lambda}\right).$$

Hierbei ist $\lambda = cT' = 2\pi c\tau'$.

In diesem Ansatz ist der Satz, daß das Integral der elektrischen Kraft über eine geschlossene Kurve gleich ist der Aenderungsgeschwindigkeit der von der Kurve umschlungenen magnetischen Kraftlinien, schon enthalten. Wir haben daher die äußere Kraft S, welche auf den Resonator wirkt, nur durch die Kraft X hervorgebracht anzusehen.

Streng genommen wird nun der Resonator, wenn er in das elektromagnetische Feld der ebenen Wellen gebracht wird, eine Störung desselben veranlassen, sodaß die Wellen in unmittelbarer Nähe des Resonators nicht mehr eben bleiben. Der Resonator zieht nämlich, wie jeder metallische Körper, die elektrischen Kraftlinien seiner Umgebung in sich hinein, grade wie ein Eisenstab die magnetischen Kraftlinien in sich koncentrirt. Diese Koncentration der elektrischen Kraftlinien kann aber nicht sehr erheblich sein, wenn die Resonatorleitung in Richtung der elektrischen Kraftlinien sich nur um Bruchtheile einer Wellenlänge erstreckt. Dies ist aber stets der Fall, denn die ganze Länge l' der Leitung ist kleiner als eine halbe Wellenlänge; und der Resonator kann

sich linear um höchstens $^1/_2 l'$ erstrecken. Diese lineare Erstreckung ist also stets kleiner als $^1/_4\lambda$, ja sogar kleiner als $^1/_8\lambda$, falls der Resonator von quadratischer Form ist.

Wir machen daher für S den näherungsweise richtigen Ansatz, daß das elektromagnetische Feld durch die Anwesenheit des Resonators nicht gestört ist; es ist dann zu setzen:

$$23)\quad S = X\cos p = M\cos p\left(\sin\frac{t}{\tau'}\cos 2\pi\frac{z}{\lambda} - \cos\frac{t}{\tau'}\sin 2\pi\frac{z}{\lambda}\right),$$

wobei p den Winkel bezeichnet, welchen die positive Richtung der Kraft X mit der positiven Richtung s der Resonator-Leitung einschließt.

Es ist daher jetzt nach 18):

$$24)\quad f_1(s) = -M\cos p\,.\sin 2\pi\frac{z}{\lambda},\qquad f_2(s) = M\cos p\cos 2\pi\frac{z}{\lambda},$$

und nach 21) hängt die Amplitude der Resonatorschwingung ab von

$$A = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}$$

wobei ist:

$$25)\quad \begin{aligned} C_1' &= \int_0^{^1/_2\lambda}\cos p\cdot\sin 2\pi\frac{z}{\lambda}\sin\frac{2\pi s}{\lambda}\,ds,\\ C_2' &= \int_0^{^1/_2\lambda}\cos p\cdot\cos 2\pi\frac{z}{\lambda}\sin\frac{2\pi s}{\lambda}\,ds. \end{aligned}$$

Für l ist dabei $^1/_2\lambda$ geschrieben.

Es läßt sich leicht analytisch beweisen, daß die Amplitude A bei Parallelverschiebung des Resonators ungeändert bleibt, wie es ja auch nach Symmetriegründen selbstverständlich ist. Denn bei Parallelverschiebung des Resonators ändern sich alle Werthe z in 25) um dieselbe Größe δ. Es ist daher

$$26)\quad C_1'' = \int\cos p\cdot\sin 2\pi\frac{z+\delta}{\lambda}\cdot\sin\frac{2\pi s}{\lambda}\,ds = C_1'\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda} + C_2'\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Analog ist

$$27)\quad C_2'' = C_2'\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda} - C_1'\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Hieraus folgt

$$28)\quad C_1''^2 + C_2''^2 = C_1'^2 + C_2'^2 = A^2,$$

d. h. die Amplitude A der Resonatorschwingung ist von der Verschiebung δ unabhängig.

Die bisherigen Formeln gelten für fortschreitende Wellen.

Kommen durch Interferenz zweier, nach der $+z$ und $-z$ Richtung fortgepflanzter Wellen stehende Wellen zu Stande, so ist anstatt 22) bei passender Wahl des Nullpunktes der z-Koordinaten zu setzen:

29) $$X = M \sin 2\pi \frac{z}{\lambda} \cos \frac{t}{\tau'}.$$

Es verschwindet also $f_2(s)$ und daher auch C_2'. Nach 21) ist die Amplitude der Resonatorschwingung $A' = C_1'$. Verschiebt man den Nullpunkt der z-Koordinaten um δ, so nimmt C_1' den Wert C_1'' nach Formel 26) an. Diese läßt sich stets umgestalten in:

$$C_1'' = C_1' \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} + C_2' \sin \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} \sin \frac{2\pi\delta'}{\lambda},$$

wobei δ' leicht zu berechnen ist.

Bezeichnet man daher die z-Koordinate eines beliebig gewählten festen Punktes der Resonator-Leitung mit z', so läßt sich durch passende Wahl des Koordinatenanfangspunktes, die allerdings bei verschiedenen Orientirungen des Resonators eine verschiedene sein kann, stets erreichen, daß die Amplitude A' der Resonatorschwingung bei stehenden Wellen sich in der Form darstellt:

30) $$A' = A \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda},$$

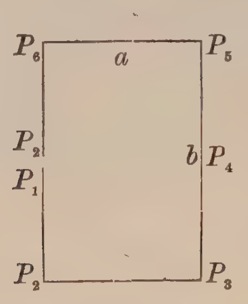
wobei A die Amplitude der Resonatorschwingung bezeichnet, welche der Resonator bei derselben Orientirung durch Wellen erhalten würde, die nur nach einerlei Richtung fortschreiten.

Bei Parallelverschiebung des Resonators in jeder beliebigen Lage ergeben sich daher Nullpunkte und Maximalpunkte seiner Schwingung, deren gegenseitiger Abstand $^1/_4\lambda$ ist. Wenn das äußere elektromagnetische Feld von gedämpften Wellen hervorgebracht wird, so ergeben sich anstatt strenger Nullpunkte im Allgemeinen nur Minimalpunkte.

Nach der Formel 30) ergiebt die an stehende Wellen angeknüpfte Rechnung zugleich die Resultate für fortschreitende Wellen.

Rechteckiger Resonator.

Der Resonator soll ein Rechteck von den Seitenlängen a, b umgrenzen. Die Unterbrechungsstelle befinde sich in der Mitte einer Seite b. (vgl. Figur 1). Der Resonator soll nur in die-



jenigen Lagen gebracht werden, in welchen seine Seiten entweder parallel oder senkrecht zur elektrischen Kraft X verlaufen. In den Formeln 25) ist daher $\cos p$ entweder Null oder ± 1. In letzterem Falle hat z einen konstanten Werth, es ist daher $\sin 2\pi z/\lambda$, bezw. $\cos 2\pi z/\lambda$ vor die Integralzeichen zu setzen. Es handelt sich dann also um Auswerthung der Integrale

$$F = \int \sin \frac{2\pi s}{\lambda} ds \tag{31}$$

über die einzelnen Seiten der Resonatorleitung. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Werth $s = 0$ an der Resonatorleitung gar nicht vorkommt. Die Werthe von s, welche den verschiedenen Punkten P der Resonatorleitung zukommen, sind:

$$\begin{array}{ll} P_4 & s = {}^1/_4\lambda, \\ P_3, P_5 & s = {}^1/_4\lambda \pm {}^1/_2 b, \\ P_2, P_6 & s = {}^1/_4\lambda \pm ({}^1/_2 b + a), \\ P_1, P_7 & s = {}^1/_4\lambda \pm (b + a) \end{array}$$

$b + a$ ist wegen der Kapacität der Unterbrechungsstelle kleiner als ${}^1/_4\lambda$.

Bezeichnet man den Werth des Integrals F nach 31) zwischen den verschiedenen Punkten P der Resonatorleitung durch entsprechende Indices, z. B.

$$\int_{P_1}^{P_2} \sin \frac{2\pi s}{\lambda} ds = F_{12},$$

so wird

$$F_{35} = \qquad \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi b}{\lambda},$$

32) $$F_{23} = F_{56} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \pi \frac{a+b}{\lambda}.$$

$$F_{12} = F_{67} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi b}{2\lambda} \cos \pi \frac{4a+3b}{2\lambda}.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichungen auftretenden Produkte trigonometrischer Funktionen sollen abkürzend durch F_1, F_2, F_3, bezeichnet werden.

Nach der Bemerkung der pag. 15 knüpfen wir die Rechnung nur an stehende Wellen an. Experimentell werden dieselben realisirt, wenn man einem H e r t z 'schen Hohlspiegelerreger eine ebene Metallwand gegenüberstellt. Rechnet man die z-Koordinaten von ihr aus nach dem Erreger zu, so ist die äußere elektrische Kraft:

$$X = M \cos \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda}.$$

Wir unterscheiden je nach der Lage des Resonators drei Haupt-Fälle, in welchen derselbe anspricht:

1) D e r R e s o n a t o r r e a g i r t a u f d i e e l e k t r i s c h e K r a f t. Alle Punkte seiner Leitung haben dieselbe z-Koordinate, (wir wollen sie z' nennen), die Seite b liegt parallel der elektrischen Kraft X. In den Formeln 25) ist $\cos p = 1$ zwischen P_3 und P_5, $\cos p = -1$ zwischen P_6 und P_2; dagegen ist $\cos p = 0$ zwischen P_2 und P_3, P_5 und P_6. Es wird daher nach 25) und 32) die Amplitude A'_ε der Resonatorschwingung, wenn man den stets auftretenden Faktor λ/π fortläßt:

$$A'_\varepsilon = \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} (F_1 - 2F_3),$$

oder

33) $$A'_\varepsilon = \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} \cdot 4 \sin \frac{\pi b}{2\lambda} \sin \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1/_2 b) \sin \frac{\pi}{\lambda}(a+b).$$

2) D e r R e s o n a t o r r e a g i r t a u f d i e m a g n e t i s c h e K r a f t. Die z-Koordinate des Mittelpunktes des von der Resonatorleitung umgrenzten Rechtecks soll z' genannt werden. Dieses Rechteck steht senkrecht zur reflektirenden Metallwand, die Seiten der Längen a sind derselben parallel. Für die der Metallwand

zunächst liegende Seite haben die z-Koordinaten den Werth $z'-b/2$, ferner kann $\cos p = -1$ gesetzt werden. Für die gegenüberliegende Seite des Rechtecks ist dann $\cos p = +1$ zu setzen, $z = z' + b/2$. Für die Seiten der Längen b ist $\cos p = 0$.

Es wird daher nach 25) und 32) die Amplitude A'_M der Resonatorschwingung (der Faktor λ/π ist fortgelassen):

34)
$$A'_M = \left\{\sin 2\pi \frac{z' + {}^1/_2 b}{\lambda} - \sin 2\pi \frac{z' - {}^1/_2 b}{\lambda}\right\} F_2,$$
$$A'_M = \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} \cdot 2 \sin \frac{\pi b}{\lambda} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}(a+b).$$

3) Der Resonator reagirt auf die elektrische Kraft und auf die magnetische Kraft. Wir wollen annehmen, daß das vom Resonator umgrenzte Rechteck senkrecht zur reflektirenden Metallwand gerichtet sein soll, und daß die Seiten der Länge b derselben parallel seien. z' bezeichnet die z-Koordinate des Mittelpunktes des Rechtecks. Es sind 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Unterbrechungsstelle des Resonators der Metallwand zu- oder abgewandt ist.

a) Die Unterbrechungsstelle ist der Metallwand zugewandt. Es ist $\cos p = 0$ zwischen P_2 und P_3, P_5 und P_6, $\cos p = +1$ zwischen P_3 und P_5, $\cos p = -1$ zwischen P_2 und P_6. Für letztere Strecke ist $z = z' - a/2$, dagegen ist $z = z' + a/2$, zwischen P_3 und P_5.

Es wird daher nach 25) und 32) die Amplitude $A'_{\varepsilon M}$ der Resonatorschwingung (der Faktor λ/π ist fortgelassen):

35)
$$A'_{\varepsilon+M} = \sin 2\pi \frac{z' + {}^1/_2 a}{\lambda} \cdot F_1 - \sin 2\pi \frac{z' - {}^1/_2 a}{\lambda} \cdot 2F_3,$$
$$= \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} \cos \frac{\pi a}{\lambda}(F_1 - 2F_3) + \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} \sin \frac{\pi a}{\lambda}(F_1 + 2F_3)$$
$$= 4 \sin \frac{\pi b}{2\lambda} \left\{\sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} \cos \frac{\pi a}{\lambda} \sin \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1/_2 b) \sin \frac{\pi}{\lambda}(a+b)\right.$$
$$\left. + \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1/_2 b) \cos \frac{\pi}{\lambda}(a+b)\right\}.$$

b) Die Unterbrechungsstelle ist von der Metallwand abgewandt. Es folgt ohne Weiteres:

$$A'_{\varepsilon+M} = \sin 2\pi \frac{z' - {}^1\!/_2 a}{\lambda} F_1 - \sin 2\pi \frac{z' + {}^1\!/_2 a}{\lambda} 2F_3$$

36) $$= 4 \sin \frac{\pi b}{2\lambda} \left\{ \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} \cos \frac{\pi a}{\lambda} \sin \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \sin \frac{\pi}{\lambda}(a+b) \right.$$
$$\left. - \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \cos \frac{\pi}{\lambda}(a+b) \right\}.$$

Die Formeln 33), 34), 35), 36) lehren, daß der Resonator für A'_ε eine maximale Wirkung besitzt, wenn er für A'_M keine Wirkung zeigt, nämlich bei $z' = {}^1\!/_4\lambda$, ${}^3\!/_4\lambda$, etc. Analog liegen auch die für die Lage 3a) geltenden Maxima an denselben Stellen z', wie die für die Lage 3b) geltenden Minima, und umgekehrt. Die Abstände dieser Maxima und Minima von der reflektirenden Metallwand bestimmen sich aus

37) $$\operatorname{tg} 2\pi \frac{z'}{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{\lambda}(a+b).$$

In der Lage 3a) liegt das erste Minimum um mehr als ${}^1\!/_4\lambda$, aber weniger als ${}^1\!/_2\lambda$ vor der Metallwand, in der Lage 3b) liegt es um weniger als ${}^1\!/_4\lambda$ vor der Metallwand.

Die Maxima A der Wirkungen A' in den drei Lagen 1) 2) 3) d. h. (nach Formel 30) auch die Wirkungen bei fortschreitenden Wellen für die betreffenden Lagen sind nach den Formeln 33), 34), 35) proportional zu:

$$A_\varepsilon = \sin \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \sin \frac{\pi}{\lambda}(a+b),$$

38) $$A_M = \cos \frac{\pi b}{2\lambda} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}(a+b),$$

$$A_{\varepsilon+M} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi a}{\lambda} \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}(a+b) + \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b) \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(a+b)}.$$

Die letzte Gleichung kann man in den beiden Formen schreiben

$$A_{\varepsilon+M} = \sqrt{A_\varepsilon^2 + \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{\pi b}{2\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}(2a + {}^3\!/_2 b)},$$

$$A_{\varepsilon+M} = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(a+b) + \sin \frac{\pi b}{\lambda} \sin \frac{\pi}{\lambda}(2a+b) \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}(a + {}^1\!/_2 b)},$$

woraus sich ergiebt, daß $A_{\varepsilon+M}$ allemal größer ist sowohl wie A_ε als wie A_M. Ferner ist im Allgemeinen A_ε größer als A_M, nur für sehr kleines b ist es umgekehrt.

Für diese Maximalamplituden A ist der gemeinsame Faktor

$\sin\frac{\pi b}{2\lambda}$ fortgelassen. Für $b = 0$ spricht also der Resonator in keiner Lage an, was von vornherein zu erwarten ist.

Für $a = 0$ ist

$$A_M = 0, \quad A_\varepsilon = A_{\varepsilon+M} = \sin\frac{\pi b}{2\lambda}\sin\frac{\pi b}{\lambda},$$

d. h. der Resonator reagirt allein auf die elektrische Kraft.

Nach 34) ist A_M symmetrisch gebaut in Bezug auf a und b, welches Resultat auch schon aus der Ueberlegung folgt, daß es für die Wirkung der magnetischen Kraft nur ankommt auf die Anzahl der, von der Resonatorleitung umschlungenen magnetischen Kraftlinien. Aus diesem Grunde folgt auch, daß bei vorgeschriebener Länge der Resonatorleitung A_M am größten ist, falls $a = b$ ist, d. h. wenn die Leitung ein Quadrat umgrenzt. Dieses Resultat folgt auch analytisch aus der Formel 34). Dagegen ist A_ε ein Maximum, falls $a = 0$ ist.

Wie ich im „experimentellen Theil" anführen werde, werden die in diesem Abschnitt gezogenen Folgerungen von der Erfahrung durchaus bestätigt.

Kreisförmiger Resonator.

Nach der Formel 25) treten in der Amplitude $A' = C_1'$ der Resonatorschwingung Integrale der Gestalt auf:

$$A_\varepsilon' \sim \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\frac{2\pi r}{\lambda}(\varphi+\alpha)\,d\varphi, \quad \text{bezw.}$$

$$A_M' \sim \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\frac{2\pi r}{\lambda}(\varphi+\alpha)\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z'-r\sin\varphi)\right]d\varphi.$$

Von diesen läßt sich das erste Integral einfach berechnen. Eine genauere Durchführung der Theorie soll aber unterbleiben, da die Komplicirtheit der Resultate nicht durch ein genügend hohes Interesse an ihnen aufgewogen wird.

Die Kapacität der Unterbrechungsstelle.

Man kann dieselbe berechnen, wenn man die beobachtete Wellenlänge λ vergleicht mit der Länge l der Resonatorleitung. Es ist nämlich [1])

39) $$C = \frac{\lambda}{8\pi\lg d/R\cdot\operatorname{tg}\pi\frac{l}{\lambda}}.$$

1) Vgl. P. Drude, Physik des Aethers, pag. 383, Formel 63).

Hierin bezeichnet C die Kapacität der Unterbrechungstelle, nach elektro-statischem Maaß gemessen, d die mittlere gegenseitige Entfernung derjenigen Punkte der Resonatorleitung, in welchen in jedem Augenblick entgegengesetzt gerichtete Ströme fließen, R die halbe Dicke der Resonatorleitung. Man bemerkt, daß nach 39) C gleich Null ist, falls $l = {}^1/_2\lambda$, was mit unseren früheren Ueberlegungen übereinstimmt. Für die im „experimentellen Theil" angewandten Resonatoren (Zehnder'sche Röhren) ergiebt sich nach 39) die Kapacität zu 0,345 bis 0,366, welches Resultat mit der Gestaltung der Unterbrechungsstelle durchaus übereinstimmt.

Die Dämpfung der Resonatorschwingungen.

Wegen des endlichen Widerstandes w der Resonatorleitung müssen die Resonatorschwingungen an einer bestimmten Stelle der Leitung die analytische Form besitzen:

$$40)\qquad J = A e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Dämpfungskonstante γ bestimmt sich zu[1])

$$41)\qquad \gamma = \frac{wT}{4l \lg d/R}.$$

Der galvanische Widerstand w der Leitung ist für schnelle elektrische Schwingungen nicht derselbe, wie für einen konstanten Strom. Vielmehr ist für erstere nach Stefan[2]) und Lord Rayleigh[3]):

$$42)\qquad w = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma T}},$$

wobei σ die specifische Leitfähigkeit, μ die Magnetisirungskonstante (Permeabilität) der Resonatorleitung bezeichnet.

Durch Einsetzen von 42) in 41) folgt

$$43)\qquad \gamma = \frac{1}{4R \lg d/R}\sqrt{\frac{\mu T}{\sigma}}.$$

Diese Formel steht in guter Uebereinstimmung mit Beob-

---

1) P. Drude, Physik des Aethers, pag. 477.
2) J. Stefan, Wied. Ann. 41, pag. 421, 1890.
3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21, pag. 369, 1886.

achtungen von Bjerkneß[1]), welcher γ zu etwa 0,002 bestimmte an einer Kupferleitung von 2 mm Dicke, für welche d etwa 60 cm betrug. Es folgt aus 43), da in *cgs*-Einheiten ausgedrückt, $R = 0,1$; $d = 60$; $\mu = 1$; $T = 3 \cdot 10^{-8}$ ist: $\gamma = 0,0027$.

Wenn man γ, T und σ kennt, so kann die Magnetisirungskonstante μ aus 43) berechnet werden. Ebenso kann man μ berechnen aus der in der Leitung durch die Schwingungen erzeugten Joule'schen Wärme[2]). Ich möchte hier darauf hinweisen, daß man den Werth von μ unter Umständen in zwei, einander nahe Grenzen einschließen kann, wenn man keine quantitativen Messungen macht, sondern wenn man nur durch qualitative Vergleichung die Reihenfolge von γ feststellt, falls man die Resonatorleitung bei gleicher geometrischer Gestaltung aus verschiedenen Metallen bestehen läßt. Man muß zu dem Zweck noch hinzuziehen die qualitative Vergleichung derjenigen Grenztiefen f, bis zu welchen die elektrischen Schwingungen noch merkbar in die Resonatorleitung eindringen. Diese Grenztiefen f hat ebenfalls Bjerkneß[3]) gemessen.

Man kann eine Schätzung von f vornehmen[4]), wenn man den nach 42) folgenden Widerstand w der Leitung gleichsetzt dem Widerstand eines Hohlcylinders der Dicke f und vom äußeren Radius R. Da f klein im Vergleich zu R ist, so folgt

44) $$w = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma T}} = \frac{l}{2\pi R f \sigma}, \quad \text{d. h.}$$
$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu\sigma}{T}}.$$

Für eine Kupferleitung ist bei $T = 1,4 \cdot 10^{-8}$, $f = 0,0074$ mm, was mit den Beobachtungen von Bjerkneß nahezu übereinstimmt, aus denen f zu etwa 0,01 mm folgt.

Wenn nun auch die Formel 44) schon deshalb nicht sehr streng sein kann, weil die Grenztiefe f kein scharf definirter Begriff ist,

---

1) V. Bjerkneß, Wied. Ann. 44, pag. 74, 1891.

2) Diesen Weg hat J. Klemencic (Wien. Ber. (II) 103, März 1894) eingeschlagen.

3) V. Bjerkneß, Wied. Ann. 48, pag. 592, 1893.

4) Diese Schätzung ist nicht auf dem von Poincaré (Occillat. électr. pag. 246) eingeschlagenen Wege statthaft, daß die Absorption ebener Wellen beim Auftreffen auf eine ebene Metallwand berechnet wird. Denn die Bedingungen des Problems sind hier ganz andere. Außerdem hat Poincaré nicht die bei verschiedenen Metallen verschiedenen Verluste dieser Wellen durch Reflexion berücksichtigt.

sondern sich mit der Empfindlichkeit der Messung steigert, so geht aus 44) doch hervor, daß die verschiedenen Metalle hinsichtlich ihres Absorptionsvermögens, d. h. der Größe $1/f$, dieselbe Reihenfolge bilden müssen, wie die Produkte $\mu\sigma$, während sie nach 43) hinsichtlich der Dämpfung γ dieselbe Reihenfolge bilden, wie die Quotienten $\mu:\sigma$.

Bjerkneß fand nun, daß die Metalle hinsichtlich ihres Absorptionsvermögens folgende absteigende Reihenfolge bilden:

Eisen, Kupfer, Nickel, Zink,

hinsichtlich der Dämpfung folgende Reihe:

	Eisen,	Nickel,	Platin,	Neusilber,	Messing	Kupfer,
σ	0,141	0,145	0,030	0,085	0,227	1.

Die Leitfähigkeiten in Bezug auf Kupfer, welche Bjerkneß beobachtet hat, sind in der letzten Reihe unter den betreffenden Metallen angegeben.

Wegen der ersteren Reihenfolge ist $\mu\sigma$ bei Nickel kleiner als σ bei Kupfer, d. h.

$$\mu . 0{,}145 < 1, \quad \text{d. h. } \mu < 6{,}9.$$

Wegen der letzteren Reihenfolge ist aber $\mu:\sigma$ bei Nickel größer als $1:\sigma$ bei Platin, d. h.

$$\frac{\mu}{0{,}145} > \frac{1}{0{,}030}, \quad \mu > 4{,}83.$$

Es ist also durch diese qualitativen Betrachtungen die Magnetisirungskonstante μ des Nickels in die beiden Grenzwerthe eingeschlossen:

$$6{,}9 > \mu > 4{,}83.$$

Nach Klemencic hat μ bei Nickel für elektrische Schwingungen den Werth $\mu = 27$. Es steht dahin, ob die Differenz gegen das vorstehende Resultat durch eine Verschiedenheit des Nickels, oder der Schwingungsdauer T veranlaßt ist[1]).

Jedenfalls geht zur Genüge aus diesen Beobachtungen hervor, daß die Magnetisirungskonstante der stark magnetischen Metalle selbst für schnelle elektrische Schwingungen einen merklich von 1 verschiedenen Werth besitzt, daß er aber kleiner ist, als für magneto-statische Zustände. Die Kleinheit des μ kann nicht dadurch veranlaßt sein, daß bei diesen Versuchen die magnetisi-

1) Bei den Versuchen von Klemencic war T 90 mal größer als bei den Versuchen von Bjerkneß.

renden Feldstärken sehr klein sind. Denn eine Schätzung von Klemencic (l. c.) ergiebt für dieselben bei Einsetzen der Schwingung erhebliche Werthe (z. B. 290 *cgs*-Einheiten). Es scheint vielmehr hieraus hervorzugehen, daß die Magnetisirung von Eisen, Nickel, Kobalt schnellen Schwingungen nicht in dem Maaße zu folgen vermag, wie langsamen. Für Lichtschwingungen muß ja thatsächlich μ für alle Metalle nahezu gleich 1 sein[1]). — Sieht man die Differenz der Magnetisirungskonstante des Nickels, wie sie sich aus den Versuchen von Bjerkneß und Klemencic berechnet, lediglich durch die Differenz der Schwingungsdauern verursacht an, (nicht durch verschiedene Bearbeitung des Nickeldrahtes), so folgt, daß die Periode der Hertz'schen Schwingungen grade in dem Gebiete liegt, in welchem bei Nickel μ stark von der Schnelligkeit der Stromwechsel abhängt.

Experimenteller Theil.

I. Experimente in fortschreitenden Luftwellen.

Wie ich im „theoretischen Theil" gezeigt habe, muß der Resonator wesentlich auf die elektrische Kraft reagiren, welche an dem Orte der Resonatorleitung besteht, die der Unterbrechungsstelle gegenüber liegt, dagegen kaum merklich auf die elektrische Kraft an der Unterbrechungsstelle selbst.

Man kann diesen Satz durch folgende Anordnung experimentell beweisen:

Ein kreisförmiger Resonator aus Kupferdraht von 70 cm Durchmesser wird so gebogen, daß die Richtung seiner Unterbrechungsstelle und der dort eventuell auftretenden Sekundärfunken rechtwinklig steht zu der Axenrichtung der Resonatorleitung an den entfernteren Stellen. Als Erreger diente die Hertz'sche Anordnung von 2 quadratischen Messingplatten (40 cm^2 Größe), an welche zwei grade Kupferdrähte angelöthet waren.

---

1) In welcher Weise man dieses Resultat aus optischen Beobachtungen ziehen kann, vgl. P. Drude, Physik des Aethers, pag. 561. Dieses Resultat folgt nicht daraus, daß ein Eisenspiegel die gewöhnlichen Erscheinungen der Metallreflexion zeigt; sondern es ergiebt sich erst aus einer quantitativen Messung des Reflexionsvermögens oder des Haupteinfallswinkels des Eisenspiegels.

Zwischen den Enden derselben, welche mit den Polen eines Ruhmkorff verbunden waren, sprangen die Primärfunken über.

Der Erreger, d. h. auch die elektrische Kraft in den erzeugten elektromagnetischen Luftwellen, lag horizontal. Wird dann die vom Resonator umgrenzte Fläche F vertikal gehalten und befindet sich der Mittelpunkt von F in einer Horizontalebene mit dem Erreger, so umschlingen keine magnetischen Kraftlinien die Resonatorleitung. Der Resonator reagirt daher in der im „theoretischen Theil“ auf pag. 17 angewandten Ausdrucksweise allein auf die elektrische Kraft.

Liegt nun das Centrum der Resonatorfläche F in der Symmetrieebene des Erregers, d. h. in derjenigen Ebene, welche vertikal zu der Erregerleitung steht und durch den Primärfunken hindurchgeht, befindet sich ferner die Unterbrechungsstelle des Resonators vertikal über dem Centrum von F, und dreht man den Resonator um eine, durch dieses Centrum hindurchgehende vertikale Axe, so verschwinden die Resonatorfunken in zwei Stellungen, nämlich wenn die Resonatorfläche F in die Symmetrieebene des Erregers fällt. In diesem Falle ist die äußere (vom Erreger verursachte) elektrische Kraft im Allgemeinen senkrecht gerichtet gegen die Axe der Resonatorleitung, nur die Richtung der Unterbrechungsstelle und die ihr unmittelbar benachbarten Axenrichtungen der Resonatorleitung sind parallel zur äußeren elektrischen Kraft.

Dieser Versuch beweist also, daß es zur Erzeugung der Resonatorfunken auf die äußere elektrische Kraft an der Unterbrechungsstelle gar nicht ankommt, oder daß jedenfalls der Resonator vorzugsweise auf die elektrische Kraft an den von seiner Unterbrechungsstelle weit entfernten Punkten seiner Leitung reagirt.

Die Berücksichtigung dieses Umstandes erklärt nun sofort auch folgende Erscheinungen: Benutzt man einen kreisförmigen Resonator in gewöhnlicher Gestalt, dessen Leitung überall in derselben Ebene F liegt, und befindet sich F in einer Horizontalebene mit dem Erreger, so schneiden magnetische Kraftlinien die vom Resonator umgrenzte Fläche F. Wir wollen wiederum annehmen, es solle das Centrum von F in der Symmetrieebene des Erregers liegen. Ferner soll auch die Unterbrechungsstelle des Resonators in dieser Ebene liegen. Die Lage des Resonators ist also die „im theoretischen Theil“ auf pag. 18 behandelte Lage 3a) resp. 3b), in welcher derselbe auf die elektrische Kraft und auf die magnetische Kraft reagirt.

Wie die dortigen Entwickelungen lehren, muß es in dieser

Lage bei Anwendung eines rechteckigen Resonators für die Stärke seiner Schwingungen ganz gleichgültig sein, ob die Lage 3a) oder die Lage 3b) eingenommen wird, d. h. ob die Unterbrechungsstelle dem Erreger zu- oder von ihm abgewandt ist, falls der Erreger ebene Wellen aussendet. — Dieses Resultat muß ebenso für einen kreisförmigen Resonator gelten.

Nun beobachtet man aber, daß die Resonatorfunken allemal stärker sind, wenn die Unterbrechungsstelle von dem Erreger abgewandt ist, als wenn sie ihm zugewandt ist; man kann es durch Regulirung der Unterbrechungsstelle leicht dahin bringen, daß die Resonatorfunken überhaupt nur in ersterem Falle einsetzen[1]). — Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, daß in der Nähe des Erregers die elektromagnetischen Wellen nicht eben sind, sondern daß die Intensität des Feldes nach dem Erreger zu wächst. Der Resonator spricht daher dann am stärksten an, wenn die, seiner Unterbrechungsstelle gegenüberliegenden Punkte seiner Leitung möglichst nahe am Erreger liegen.

II. Experimente an Drahtwellen.

Es wurde die Blondlot'sche Anordnung[2]) benutzt. Die gegenseitige Distanz der Parallel-Drähte D, D betrug 11 cm. — Als Resonatoren wurde eine Zehnder'sche Vakuumröhre verwendet, deren Glimmelektroden durch einen dicken Kupferdraht von verschiedener Gestalt und verschiedener Länge metallisch mit einander verbunden wurden. (Zu dem Zweck wurden die an die Glimmelektroden angelötheten Platindrähte um den Kupferdraht herumgewickelt). Die Schwingungen im Resonator erkennt man an der, im Dunkeln gut sichtbaren Glimmentladung der Vakuumröhre. Die Helligkeit derselben läßt auf die Intensität der Schwingungen schließen.

Um den, mir hier zu Gebote stehenden Platz nicht zu überschreiten, kann ich nicht auf die speciellere Beschreibung dieser Versuche eingehen. Ich hoffe, dieselbe demnächst an anderer Stelle geben zu können.

Ich will nur erwähnen, daß das, schon aus den vorigen Experimenten erhaltene Resultat bestätigt wurde, daß der Resonator wesentlich auf die elektrische Kraft reagirt, welche an den Punkten seiner Leitung besteht, die weit von der Unterbrechungsstelle ent-

1) Dieses konnte ich z. B. sehr gut erreichen, wenn das Centrum von F um 2,5 m vom Erreger entfernt war.

2) Blondlot, Compt. Rend. 113, pag. 628, 1891.

fernt sind. Aus diesem Resultat in Verbindung mit der Rücksicht auf den Umstand, daß die Resonatorleitung eine Deformation der elektrischen Kraftlinien des ursprünglichen Feldes herbeiführt, erklärte sich das, je nach der Gestalt und Lage des Resonators sehr verschiedene Ansprechen.

III. Experimente in stehenden Luftwellen.

a) Knotenlage verschiedener Resonatoren. Es wurde ein Hertz'scher Hohlspiegelerreger benutzt, welcher Wellen von ungefähr 60 cm Länge entsendet. Ihm senkrecht gegenüber befand sich eine ebene Metallwand von 2 m Höhe und 1,1 m Breite in einer Distanz $d = 81$ cm. von der Oeffnung des Hohlspiegels. — Die Erreger-Funken sprangen in Petroleum über.

Es wurde zunächst eine rechteckige Resonatorleitung benutzt, bestehend aus den Glimmelektroden einer Zehnder'schen Röhre und dem sie verbindenden Kupferdraht. Die Länge des Rechtecks betrug $a = 31$ mm, die Breite $b = 77$ mm. Der Resonator war an einer dünnen Holzleiste befestigt, welche horizontal, d. h. senkrecht gegen die elektrische Kraft, verlief. Die sonstigen, an der Zehnder'schen Röhre befindlichen Metalltheile verliefen ebenfalls senkrecht gegen die elektrische Kraft, sodaß sie nicht wesentliche Störungen des elektromagnetischen Feldes verursachen konnten. Der Beobachter befand sich außerhalb des zwischen Hohlspiegel und Metallwand eingeschlossenen Raumes. Der Resonator wurde auf die Maxima, resp. Minima der Leuchtwirkung eingestellt.

Interesse bieten nur die Beobachtungen in den im „theoretischen Theile“ unter 3a) und 3b) genannten Lagen. Die Knoten und Bäuche in den Lagen 1) und 2), d. h. in denjenigen Lagen, in welchen der Resonator allein auf die elektrische, bezw. magnetische Kraft reagirt, entsprach in jedem Falle der Theorie, d. h. in der Metallwand selbst lag ein Knoten der elektrischen, ein Bauch der magnetischen Kraft. Die übrigen Knoten und Bäuche lagen in konstanten Intervallen, die einer halben Wellenlänge der Resonatorschwingung entsprechen, vor der Metallwand.

In den folgenden Tabellen sind in der ersten Kolonne die beobachteten Abstände z' des Centrums der Resonatorfläche F von der Metallwand in cm angegeben, für welche ein Maximum des Leuchtens an den Glimmelektroden eintrat, in der zweiten Kolonne die Mittelwerthe dieser Beobachtungen, in der dritten die nach der Formel 37) des „theoretischen Theiles“ berechneten Werthe von z'. Dabei ist der Werth $\lambda = 63$ cm der Rechnung zu Grunde

gelegt, welcher der Mittelwerth aus allen Beobachtungen (auch aus den in den Lagen 1) und 2) des Resonators gemachten) ist.

Lage 3a). Unterbrechungsstelle der Metallwand zugewandt.

z' beob.	z' Mittel	z' berechn.
8,0; 7,0; 8,0	7,7	6,3
39; 40; 38,5	39,2	37,8
72,5; 74	73,2	69,3

Lage 3b). Unterbrechungsstelle von der Metallwand abgewandt.

z' beob.	z' Mittel	z' berechn.
23,5	23,5	25,2
56,0; 56,0	56,0	56,7
86,5; 85	85,7	88,2

Die folgenden Tabellen beziehen sich auf einen anderen rechteckigen Resonator der Seitenlängen $a = 47$ mm, $b = 78$ mm. Die Distanz d der Metallwand von der Oeffnung des Hohlspiegels betrug 101 cm. Die beobachteten Werthe z' beziehen sich abwechselnd auf Maxima und Minima der Resonator-Wirkung. Der der Metallwand zunächstliegende Werth ($z' = 10,3$ cm) ist ein Maximum. Der Rechnung ist der Werth $\lambda = 72$ cm für die Wellenlänge zu Grunde gelegt, der sich als Mittel aus allen Beobachtungen ergiebt. Dieser Werth von λ ist erheblich größer, als es der Resonanz mit dem Erreger entsprechen würde ($\lambda = 60$ cm). Wegen der starken Dämpfung der Erregerschwingungen und der geringen Dämpfung der Resonatorschwingungen ist aber für letztere die Periode seiner Eigenschwingung weit maßgebender, als die des Erregers.

Lage 3a.

z' beob.	z' Mittel	z' berechn.
10,0; 10,7	10,3	8,2
28,0; 25,5	26,7	26,2
43; 48	45,5	44,2
63; 64,5	63,7	62,2
85,5	85,5	80,2

Lage 3b.

z' beob.	z' Mittel	z' berechn.
27,0; 26,5;	26,7	27,8
45,5; 47,0	46,2	45,8
62,0; 62,5	62,2	63,8
80,0; 80,0	80,0	81,8

Auch in dieser Lage 3b) entspricht der, der Metallwand zunächstliegende Werth von z' ($z' = 26,7$) einem Maximum. Das nach der Theorie bei $z' = 9,8$ liegende Minimum konnte nicht beobachtet werden, weil wegen der Gestaltung der Zehnder'schen Röhre der Resonator in der Lage 3b der Metallwand nicht genügend genähert werden konnte.

Wie die mitgetheilten Tabellen lehren, entspricht die Theorie gut den Beobachtungen.

Ich stellte auch Beobachtungen mit einem kreisförmigen Resonator von 7,5 cm Durchmesser an. Ich hoffe, die Resultate hiervon an anderer Stelle geben zu können. Die in den stehenden Wellen zu beobachtenden Maxima hängen in ihrer Intensität sehr bedeutend von der Distanz d der Metallwand von der Oeffnung

des Hohlspiegels ab, wobei unter „Oeffnung“ diejenige Ebene verstanden ist, in welchen der Blechrand des (nach den Hertz'schen Angaben construirten) Hohlspiegels liegt. Diese Intensität der Maxima nimmt nicht gleichförmig mit wachsendem d ab, sondern man kann deutlich ein periodisches Verhalten derselben bei gleichförmig wachsendem d erkennen. Nachdem zunächst konstatirt war, daß die Lage der Knoten und Bäuche von d unabhängig war, wurde ein Resonator in einem, für ihn stattfindenden Schwingungsbauche mit der Metallwand fest verbunden, sodaß der Resonator mit der Metallwand gemeinsam verschiebbar war. Bei Parallel-Verschiebung der Metallwand, d. h. Aenderung der Distanz d, konnte ich dann deutlich wahrnehmen, daß für gewisse, selbst sehr kleine Distanzen d der Resonator gar nicht ansprach, während er für andere Werthe von d sehr stark leuchtete.

So war für den rechteckigen Resonator der Wellenlänge $\lambda = 72$ cm keine Wirkung vorhanden für die Werthe

$$d_0 = 41, 81, 116 \text{ cm},$$

dagegen maximale Wirkungen bei den dazwischen liegenden Werthen

$$d_m = 61, 99 \text{ cm}.$$

Diese Werthe d_0, bezw. d_m ergaben sich in ganz derselben Weise, einerlei, ob man den Resonator in der Lage 1), 2) oder 3) anwendete.

Die Berücksichtigung dieser Erscheinung ist für den Experimentator von Wichtigkeit, da, wenn zufällig eine Distanz d_0 zwischen Hohlspiegel und Metallwand getroffen ist, die Bildung stehender Wellen überhaupt nicht nachweisbar ist, da dann der Resonator in keiner Stellung und Distanz anspricht. Zur Demonstration wird man also zweckmäßig immer eine Distanz d_m wählen.

Die genannte Erscheinung nöthigt zu der Auffassung, daß die, von der Metallwand reflektirten Wellen wiederum vom Hohlspiegel reflektirt werden. Denken wir uns den Hohlspiegel durch eine Metallwand ersetzt, welche den Abstand d' von der wirklich vorhandenen Metallwand besitzt, so tritt offenbar ein Maximum der Wirkung ein, wenn d' gleich einem Multiplum von $^1/_2\lambda$ ist, dagegen ein Minimum der Wirkung, wenn d' gleich einem ungeraden Multiplum von $^1/_4\lambda$ ist. Eigenthümlich ist nun, daß für den hier zu Grunde zu legenden Werth der Wellenlänge λ wiederum nur der Resonator maßgebend ist, nicht der Erreger. Denn die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Werthen der mitgetheilten d_0 und d_m ist im Mittel 38 cm, d. h. nahezu die halbe Wellenlänge

der Resonatorschwingung, nicht die der Erregerschwingung. Zugleich geht aus den mitgetheilten Zahlen für d_0 und d_m hervor, daß die den Hohlspiegel hinsichtlich seiner Reflexionswirkung ersetzende Metallwand etwa $^1/_4\lambda$ vor oder hinter seiner Oeffnung liegt, d. h. daß die Oeffnung des Hohlspiegels selbst ersetzt werden könnte durch eine Wand, welche die elektrische Kraft ohne Umkehr der Amplitude reflektirt, die magnetische Kraft dagegen mit einer Umkehr ihrer Amplitude.

Daß die Werthe d_0 und d_m vom angewandten Resonator abhängen, wird auch dadurch bewiesen, daß sie für den kürzeren Resonator der Wellenlänge $\lambda = 63$ folgende Werthe besaßen:

$$d_m = 48, 81, 112.$$

Für diesen Resonator sind also die günstigen Distanzen d_m nahezu die ungünstigen Distanzen d_0 des ersten Resonators[1]). Die Differenz aufeinander folgender d_m ist hier im Mittel 32 cm, d. h. kleiner als beim ersten Resonator, und nahezu gleich der halben Wellenlänge 31,5 des Resonators. — Auch hier bestätigt sich der vorhin gezogene Schluß, daß die aequivalente Metallwand des Hohlspiegels um $^1/_4\lambda$ hinter seiner Oeffnung liegt.

b) Vergleichung der Intensität der Resonatorschwingungen in verschiedenen Lagen. Da die Störung elektromagnetischer Wellen durch den Erdboden bei kurzen Wellen weniger stark ist, als bei langen, und da für erstere leichter eine regelmäßige, nicht durch Beugung gestörte Reflexion an einer mäßig großen Metallwand zu erreichen ist, als für letztere, so benutzte ich zu den Versuchen die kurzen (60 cm) Wellen des Hertz'schen Hohlspiegelerregers, obgleich die Resonatorwirkung bei ihnen viel schwächer ist, als bei mehreren Meter langen Wellen.

Wegen dieser Schwäche der Wirkungen schienen mir die, bisher zur quantitativen Messung der Resonatorschwingungen verwendeten Methoden, nämlich Messung der maximalen Länge der Sekundärfunken (Hertz), der thermischen Wirkung, sowohl der direkten (Klemencic) als der indirekten (Rubens), oder Messung der ponderomotorischen Wirkung der Resonatorenden (elektrometrische Methode von Bjerkneß) nicht genügend sichere Aussicht auf Erfolg zu bieten. Dagegen gelangte ich dadurch sehr

---

1) Zur Demonstration der stehenden Wellen muß man also für jeden Resonator besonders die günstigen Distanzen ermitteln, wenigstens wenn man nicht genau seine Wellenlänge kennt.

gut zum Ziel, daß ich den galvanischen Widerstand des durch die Resonatorschwingungen in Luminiscenz versetzten Gasraums in der Zehnder'schen Röhre maaß.

Da dieser Widerstand außerordentlich groß ist (er beziffert sich nach vielen Millionen Ohm, cf. unten), so empfahl sich zur Messung desselben mehr ein Elektrometer, als ein Galvanometer, da letzteres sehr empfindlich sein müßte und durch die Thätigkeit des, den Erreger versorgenden Ruhmkorff'schen Apparates gestört wird.

Ich schaltete daher zwei Zehnder'sche Röhren Z_1 und Z_2, deren Glimmelektroden durch gleich gestaltetete Kupferdrähte verbunden waren, in der Weise hintereinander, daß die Hauptelektrode H_1 von Z_1 mit einem Pol einer Batterie B von 78 Daniells verbunden wurden, deren anderer Pol an Erde gelegt war. Von dem Punkte P_1' der Resonatorleitung von Z_1, welcher der Unterbrechungsstelle gegenüber lag, führte ein Draht S zu der Hauptelektrode H_2 der Röhre Z_2. Der Punkt P_2' der Resonatorleitung von Z_2, welcher ihrer Unterbrechungsstelle gegenüber lag, war zur Erde abgeleitet. Von S führte ein Draht zur Nadel N eines Thomson-schen Quadrantelektrometers, dessen Quadranten zu einer Potentialdifferenz von 20 Klark geladen waren. Z_2 blieb in fester Lage zur Metallwand und diente als Standard-Widerstand, Z_1 wurde in vsrschiedene Lagen gebracht.

Man ist durch diese Anordnung in weiten Grenzen unabhängig von den Schwankungen der Aktivität der Erregerfunken, und in der That nahm die Elektrometernadel zum Theil sehr ruhige Lagen an.

Nennt man f_0 den Ausschlag der Elektrometernadel, wenn sie zum vollen Potential der 78 Daniells geladen wird, f den bei Spiel des Erregerfunken beobachteten Ausschlag, wenn die Elektrometernadel mit einem Punkte des Drahtes zwischen beiden Zehnder-schen Röhren verbunden ist, so ist das Verhältniß der galvanischen Widerstände beider Röhren[1])

$$\text{45)} \qquad \frac{w_1}{w_2} = \frac{f_0}{f} - 1.$$

Der Ausschlag f war etwas verschieden je nach der Richtung des Primärstromes im Induktorium, welches die Erregerfunken erzeugte. Die Indices 1, 2 an f beziehen sich auf die beiden verschiedenen Richtungen dieses Primärstromes.

1) Der galvanische Widerstand der Batterie B war gegen w_1 und w_2 vollkommen zu vernachlässigen.

Im folgenden betrug die Distanz d der Metallwand von der Hohlspiegelöffnung 68,5 cm. Die Standardröhre Z_2 war in der Lage 3a im Abstand $z' = 9{,}5$ cm von der Metallwand befestigt. Die Beobachtungen sind in der Reihenfolge mitgetheilt, wie sie zeitlich nach einander angestellt wurden. Die f sind Mittelwerthe mehrerer (meist 2) Einzelbeobachtungen. Lage 2° bedeutet, daß die Unterbrechungsstelle von Z_2 oben lag; Lage 2_u, daß sie unten lag.

Z_1 in Lage 3a,	$z' = 46$ cm,	$f_1 = 90$,	$f_2 = 71$.
	$z' = 10$,	$f_1 = 76$,	$f_2 = 57$.
Lage 2°,	$z' = 36$,	$f_1 = 55$,	$f_2 = 55$.
Lage 1,	$z' = 18$,	$f_1 = 70$,	$f_2 = 58$.
Lage 2°,	$z' = 36$,	$f_1 = 52$,	$f_2 = 52$.
Lage 2_u,	$z' = 36$,	$f_1 = 37$,	$f_2 = 32$.
Lage 3a,	$z' = 10$,	$f_1 = 79$,	$f_2 = 57$.
	$z' = 46$,	$f_1 = 92$,	$f_2 = 68$.
Lage 3b,	$z' = 26$,	$f_1 = 91$,	$f_2 = 73$.

Daß die Lagen 2° und 2_u verschiedene f ergeben, deutet auf eine Störung der ebenen Wellen hin, vielleicht durch die, den Resonator tragende Holzleiste. Als Mittelwerthe ergeben sich:

Lage 3a, bezw. 3b: $f = 77$ Skalentheile
Lage 2, $f = 45$ „
Lage 1, $f = 64$ „

Da f_0 gleich 146 Skalentheilen war, so berechnet sich nach Formel 45)

Lage 3a, bezw. 3b: $w_1 : w_2 = 0{,}90$ [1])
Lage 2, $w_1 : w_2 = 2{,}25$,
Lage 1, $w_1 : w_2 = 1{,}29$.

Gemäß den im „theoretischen Theil“ mitgetheilten Formeln 38) (pag. 19) müssen die Amplituden der Resonatorschwingungen in den drei Lagen proportional sein zu:

$$A_{\varepsilon+M} = 0{,}247, \quad A_M = 0{,}172, \quad A_\varepsilon = 0{,}191.$$

Multiplicirt man diese Amplituden A mit den Widerständen w_1, welche für die betreffenden Lagen beobachtet sind, so ergeben sich Zahlen, welche proportional sind zu:

$$0{,}222; \quad 0{,}387; \quad 0{,}247.$$

1) Daß $w < w_2$ ist, lag daran, daß die Distanz der Glimmelektroden bei Z_1 kleiner war, als bei der Röhre Z_2. Letztere leuchtete daher auch nicht so lebhaft, als Z_1.

$A_1 \cdot w_1$ ist also für das kleinste A am größten, d. h. die Widerstände wachsen schneller, als die Amplituden abnehmen. Jedenfalls geht aus den Versuchen hervor, daß, entsprechend der Theorie, der benutzte Resonator am stärksten in der Lage 3 anspricht, schwächer in der Lage 1, am schwächsten in der Lage 2.

Man kann übrigens aus den Widerstandsmessungen wirklich ein Maaß für die Resonatorschwingungen erhalten, wenn man eine Aichung der Widerstandsmessungen dadurch vornimmt, daß man den Resonator F von der Lage 3 des Resonators aus, in welcher F vertikal steht, allmählich gegen die Vertikalebene neigt. Die Intensität der Resonatorschwingungen muß dann proportional $\cos \varphi$ sein, falls φ den Neigungswinkel von F gegen die Vertikalebene bezeichnet. Trägt man für alle Lagen φ die beobachteten Widerstände w_1 in einer Kurve auf, so kann man aus dem Widerstande w_1 der Zehnder'schen Röhre in irgend einer Lage die zugehörige Intensität der Resonatorschwingung angeben bis auf einen, allen Messungen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor.

Bei einer anderen Messungsreihe mit demselben Resonator ergab sich

Lage 3: $f = 79$ Skalentheile
Lage 2: $f = 44$ „
Lage 1: $f = 63$ „

also Werthe von f, welche sehr nahe übereinstimmen mit den oben mitgetheilten.

Der galvanische Widerstand eines luminiscirenden Gasraumes.

Durch Anwendung eines bekannten Widerstandes w_2 anstatt der Zehnder'schen Röhre Z_2, welchen ich mir durch Glasröhren herstellte, welche eine Lösung von Jodkadmium in Amylalkohol enthielten, erhielt ich für w_1 in der Lage 3:

$$w_1 = 2870 \text{ Millionen Ohm.}$$

Dieser Widerstand w_1 hängt von der Schnelligkeit der Unterbrechungen des den Erreger speisenden Induktoriums ab, er erwies sich nahezu umgekehrt proportional zu derselben. Bei diesen Versuchen machte der Wagner'sche Hammer (Platinkontakt) 25 Unterbrechungen in der Sekunde.

Ich will nicht behaupten, daß w_1 wirklich allein von der Natur eines Widerstandes wäre. w_1 hat jedenfalls die Bedeutung, daß die luminiscirende Zehnder'sche Röhre bei den angestellten

Versuchen durch einen Widerstand w_1 in elektrischer Hinsicht ersetzbar ist.

Es ist wohl möglich, daß Polarisation in dem Gasraum von großem Einfluß ist. Bemerkenswerth ist dann aber, daß w_1 sich unabhängig von der den Gleichstrom erzeugenden Spannung erwies, indem für w_1 nahezu derselbe Werth sich ergab, wenn die Batterie B anstatt 78 Daniells nur deren 30 enthielt.

Außerdem hängt w_1 sehr wenig von der Länge des Gasraumes ab. Die nähere Beschreibung dieser Versuche hoffe ich an anderer Stelle geben zu können.

Für intensivere elektrische Schwingungen erhält man kleinere Widerstandswerthe w_1, sie sind aber immer noch sehr bedeutend, z.B. 390 Millionen Ohm, wenn die Zehnder'sche Röhre dicht an die Platten eines Luftkondensators gebracht wurde, welcher mit den Polen der Sekundärspule eines Tesla-Transformators verbunden war[1]). Diese Zahl bezieht sich sogar auf den Widerstand zwischen den Glimmelektroden $G\ G$, welche nur einen Abstand von einigen hundertstel Millimeter besitzen.

Göttingen, Juli 1894.

---

1) Es wurde die von Himstedt in Ber. d. Oberh. Ges. f. Nat.- u. Heilk. zu Giessen, No. 30; Wied. Ann. 52, p. 473, 1894 angegebene Versuchsanordnung benutzt.

Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers.

Von

David Hilbert in Königsberg i./Pr.

Vorgelegt von H. Weber in der Sitzung vom 7. Juli 1894.

Da ein jeder beliebige Zahlkörper als ein Körper aufgefaßt werden kann, welcher in einem Galois'schen Körper als niederer Körper enthalten ist, so bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir bei der Erforschung der Theorie der algebraischen Zahlen von vornherein die Annahme machen, daß der zu Grunde liegende Zahlkörper ein Galois'scher Körper ist. Insbesondere erweist sich der systematische Ausbau der allgemeinen Theorie der Ideale eines Galois'schen Körpers als nothwendig, wenn wir den in Kummers Abhandlungen über die höheren Reciprocitätsgesetze enthaltenen Anregungen mit Erfolg nachgehen und über die in denselben gewonnenen Resultate zur vollen Herrschaft gelangen wollen. Die vorliegende Note enthält in Kürze die Grundzüge einer solchen Theorie des Galois'schen Körpers.

Der Galois'sche Körper K vom Mten Grade werde durch die Zahl Θ bestimmt, welche einer irreduciblen ganzzahligen Gleichung Mten Grades genügt. Die Wurzeln derselben seien $\Theta = s_1\Theta$, $s_2\Theta, \ldots, s_M\Theta$, wo die Substitutionen $s_1, s_2, \ldots, s_M$ eine Gruppe G vom Mten Grade bilden. $\mathfrak{P}$ sei ein Primideal $f$ten Grades in K; p die durch $\mathfrak{P}$ theilbare rationale Primzahl und P sei eine Primitivzahl für das Primideal $\mathfrak{P}$, d. h. P sei von der Beschaffenheit, daß jede ganze Zahl des Körpers K einer Potenz von P nach dem Primideal $\mathfrak{P}$ congruent wird.

Die Primitivzahl P genügt nach dem Primideal $\mathfrak{P}$ einer Congruenz von der Gestalt

$$\Phi(x) \equiv 0, \qquad (\mathfrak{P})$$

wo $\Phi(x)$ eine ganze Funktion $f$ten Grades in x mit ganzen ratio-

nalen Coefficienten bedeutet, welche im Sinne der Congruenz nach der rationalen Primzahl p irreducibel ist. Es gilt ferner der Hilfssatz:

Wenn Ω irgend eine ganze Zahl in K ist, so giebt es unter den Substitutionen $s_1, s_2, \ldots, s_M$ stets wenigstens eine Substitution s von der Art, daß nach dem Primideal $\mathfrak{P}$ die Congruenz

$$s\Omega \equiv \Omega^p \qquad (\mathfrak{P})$$

besteht.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bilden wir die ganze ganzzahlige Function

$$F(x) = (x - s_1\Omega)(x - s_2\Omega)\ldots(x - s_M\Omega)$$

und erhalten dann wegen

$$F(x^p) \equiv [F(x)]^p \qquad (p)$$

die Congruenz

$$(\Omega^p - s_1\Omega)(\Omega^p - s_2\Omega)\ldots(\Omega^p - s_M\Omega) \equiv 0, \quad (\mathfrak{P})$$

welche die Richtigkeit des Hilfssatzes erkennen läßt.

Nun seien $z, z', z'', \ldots$ diejenigen sämmtlichen r_z Substitutionen der Gruppe G, welche das Primideal $\mathfrak{P}$ ungeändert lassen; dieselben bilden eine Gruppe vom r_z ten Grade, welche die Zerlegungsgruppe des Primideals $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_z bezeichnet werden soll.

Nehmen wir $\Omega = A^{p^f-1}P$, wo A eine nicht durch $\mathfrak{P}$, wohl aber durch alle zu $\mathfrak{P}$ conjugirten und von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Primideale theilbare ganze Zahl ist, so zeigt die Anwendung des Hilfssatzes die Existenz einer Substitution s von der Art, daß die Congruenz

$$s[A^{p^f-1}P] \equiv A^{p(p^f-1)}P^p \qquad (\mathfrak{P})$$

oder

$$[sA]^{p^f-1}sP \equiv P^p \qquad (\mathfrak{P})$$

gilt. Hieraus folgt $sA \not\equiv 0$ nach $\mathfrak{P}$ und $sP \equiv P^p$ nach $\mathfrak{P}$. Die erste Incongruenz lehrt, daß A nicht durch $s^{-1}\mathfrak{P}$ theilbar ist; folglich wird $s^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P} = s\mathfrak{P}$ d. h. die Substitution s gehört der Zerlegungsgruppe g_z an. Wir setzen $s = z$ und haben dann die Congruenz

$$zP \equiv P^p \qquad (\mathfrak{P}).$$

Die wiederholte Anwendung der Substitution z liefert die Congruenzen

$$z^2 P \equiv P^{p^2}, \quad z^3 P \equiv P^{p^3}, \ldots, \quad z P \equiv P^{p^f} \equiv P. \qquad (\mathfrak{P})$$

Infolge der letzten Congruenz ist $t = z^f$ eine Substitution von der Beschaffenheit, daß für jede beliebige ganze Zahl Ω des Körpers K die Congruenz

$$t\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P})$$

erfüllt ist. Es seien $t, t', t'', \ldots$ diejenigen sämmtlichen r_t Substitutionen der Gruppe G, denen ebenfalls die genannte Eigenschaft zukommt; dann wird leicht gezeigt, daß diese r_t Substitutionen eine Gruppe r_t ten Grades bilden. Diese Gruppe werde die Trägheitsgruppe des Primideals $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_t bezeichnet. Da, wie ebenfalls leicht ersichtlich ist, das Primideal $\mathfrak{P}$ bei der Anwendung einer jeden der Substitutionen $t, t', t'', \ldots$ ungeändert bleibt, so ist die Trägheitsgruppe g_t eine Untergruppe der Zerlegungsgruppe g_z; es ergiebt sich ferner leicht der Satz:

Die Trägheitsgruppe g_t eines Primideals ist eine invariante (d. h. ausgezeichnete) Untergruppe der Zerlegungsgruppe g_z.

Ist z^* eine beliebige Substitution der Zerlegungsgruppe, so folgt aus der Congruenz $\Phi(P) \equiv 0$ nach $\mathfrak{P}$ nothwendig $\Phi(z^* P) \equiv 0$ nach $\mathfrak{P}$ und da die Congruenz $\Phi(x) \equiv 0$ nach $\mathfrak{P}$ nur die f Congruenzwurzeln $P, P^p, P^{p^2}, \ldots, P^{p^{f-1}}$ besitzt, so folgt $z^* P \equiv P^{p^i}$ nach $\mathfrak{P}$, wo i einen der f Werthe $0, 1, \ldots, f-1$ hat. Da andrerseits $P^{p^i} \equiv z^i P$ ist, so wird $z^{-i} z^* P \equiv P$ nach $\mathfrak{P}$ und mithin ist $z^{-i} z^*$ eine Substitution t der Trägheitsgruppe, d. h. $z^* = z^i t$. In dieser letzteren Gestalt sind also sämmtliche Substitutionen $z, z', z'', \ldots$ der Zerlegungsgruppe darstellbar und da auch umgekehrt $z^i t$ für $i = 0, 1, \ldots, f-1$ lauter von einander verschiedene Substitutionen darstellt, so ist $r_z = f r_t$. Wir fassen diese Resultate in folgendem Satze zusammen:

Der Grad der Zerlegungsgruppe g_z eines Primideals $\mathfrak{P}$ ist gleich dem Producte des Grades f von $\mathfrak{P}$ in den Grad der Trägheitsgruppe g_t. Man erhält die Substitutionen der Zerlegungsgruppe, wenn man die Substitutionen der Trägheitsgruppe mit $1, z, z^2, \ldots, z^{f-1}$ multiplicirt, wo z eine geeignet gewählte Substitution der Zerlegungsgruppe ist. z^f gehört der Trägheitsgruppe an.

Es erweist sich jetzt die Einführung der folgenden allgemeinen Begriffe als nothwendig. Bilden die r Substitutionen $s_1 = 1, s_2, \ldots, s_r$ von G eine Untergruppe g vom $r$ten Grade, so

bestimmt die Gesammtheit aller Zahlen des Körpers K, welche bei Anwendung einer jeden Substitution von g ungeändert bleiben, einen in K enthaltenen Unterkörper $\varkappa$ vom Grade $m = \frac{M}{r}$.

Ist A eine beliebige Zahl, $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal in K, so heißt das Product

$$\nu(A) = s_1 A \cdot s_2 A \ldots s_r A$$

die Partialnorm von A in Bezug auf die Gruppe g oder den Unterkörper $\varkappa$; desgleichen heißt

$$\nu(\mathfrak{J}) = s_1 \mathfrak{J} \cdot s_2 \mathfrak{J} \ldots s_r \mathfrak{J}$$

die *Partialnorm* des Ideals $\mathfrak{J}$ in Bezug auf den Körper $\varkappa$.

Die Partialnorm $\nu(A)$ einer Zahl A ist offenbar stets eine Zahl in $\varkappa$. Wir sagen nun, ein Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers K *liege im Körper* $\varkappa$ oder *sei ein Ideal des Körpers* $\varkappa$, wenn dasselbe als größter gemeinsamer Theiler von Zahlen des Körpers $\varkappa$ dargestellt werden kann. Die Partialnorm $\nu(\mathfrak{J})$ eines Ideals $\mathfrak{J}$ ist stets ein Ideal, welches im Körper $\varkappa$ liegt.

Der zur Zerlegungsgruppe g_z gehörige Körper $\varkappa_z$ werde *Zerlegungskörper* genannt; derselbe ist vom Grade $m_z = \frac{M}{r_z}$.

Der zur Trägheitsgruppe g_t gehörige Körper $\varkappa_t$ werde *Trägheitskörper* genannt; derselbe ist vom Grade $m_t = \frac{M}{r_t}$ und enthält den Zerlegungskörper als Unterkörper.

Das algebraische Verhältniß zwischen Zerlegungskörper und Trägheitskörper wird durch den folgenden Satz klargelegt:

Ist ϑ_t *eine den Trägheitskörper bestimmende Zahl, so genügt* ϑ_t *einer Gleichung* f*ten Grades von der Gestalt*

$$\vartheta_t^f + \alpha_z \vartheta_t^{f-1} + \alpha_z' \vartheta_t^{f-2} + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten Zahlen des Körpers $\varkappa_z$ *sind, und welche im Rationalitätsbereiche* $\varkappa_z$ *eine Galois'sche Gleichung mit der cyklischen Gruppe* f*ten Grades ist.*

Die Partialnormen des Primideals $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Körper $\varkappa_z$ und $\varkappa_t$ sind

$$\nu_z(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{r_z} \text{ und } \nu_t(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{r_t}.$$

Um nun die niedrigste in $\varkappa_z$ liegende Potenz des Primideals $\mathfrak{P}$ zu ermitteln, denken wir uns den größten gemeinsamen Theiler aller derjenigen ganzen Zahlen des Körpers $\varkappa_z$ bestimmt, welche durch

$\mathfrak{P}$ theilbar sind. Dieser Theiler ist nothwendig im Körper $\varkappa_z$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ und da $\mathfrak{P}^{r_z}$ in $\varkappa_z$ liegt, so ist $\mathfrak{p}$ jedenfalls eine Potenz von $\mathfrak{P}$; wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^u$. Zur Bestimmung des Exponenten u dient die folgende Betrachtung. Soll eine durch $\mathfrak{P}$ nicht theilbare Zahl A des Körpers K der Congruenz $A \equiv zA$ nach $\mathfrak{P}$ genügen und ist etwa $A \equiv P^i$ nach $\mathfrak{P}$, so muß nothwendig $i \equiv pi$ nach $p^f - 1$ und folglich i eine durch $1 + p + p^2 + \ldots + p^{f-1}$ theilbare Zahl sein, d. h. es giebt nur $p - 1$ unter einander nach $\mathfrak{P}$ incongruente Zahlen von der gewünschten Beschaffenheit, und es wird daher $A \equiv a$ nach $\mathfrak{P}$, wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet. Aus dieser Betrachtung folgt insbesondere, daß jede Zahl α des Körpers $\varkappa_z$ einer rationalen Zahl a nach $\mathfrak{P}$ und mithin auch nach $\mathfrak{p}$ congruent ist, d. h. $\mathfrak{p}$ ist im Körper $\varkappa_z$ ein Primideal ersten Grades und die Norm $n(\mathfrak{p})$ im Körper $\varkappa_z$ ist folglich gleich p. Andrerseits ist die Norm von $\mathfrak{p}$ im Körper K durch die Formel $N(\mathfrak{p}) = [n(\mathfrak{p})]^{r_z}$ gegeben, und wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^u$ und $N(\mathfrak{P}) = p^f$ folgt somit $p^{uf} = p^{r_z}$ d. h. $u = r_t$. Daraus folgt der Satz

Das Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{r_t}$ liegt im Zerlegungskörper $\varkappa_z$ und ist in diesem ein Primideal ersten Grades: es wird also jede ganze Zahl des Körpers $\varkappa_z$ einer rationalen Zahl congruent nach $\mathfrak{p}$.

Da nothwendig die bezüglich $\varkappa_z$ zu $\mathfrak{p}$ conjugirten $m_z - 1$ Ideale zu $\mathfrak{p}$ prim sind und mit $\mathfrak{p}$ multiplicirt das Product p ergeben, so ist der Zerlegungskörper zugleich der Körper niedrigsten Grades, in welchem die Zerlegung der rationalen Primzahl p soweit bewirkt wird, daß dabei eine Trennung der Faktoren $\mathfrak{P}$ von den übrigen stattfindet.

Um den Bau der Trägheitsgruppe näher zu erforschen, bezeichnen wir mit A eine durch $\mathfrak{P}$, aber nicht durch $\mathfrak{P}^2$ theilbare Zahl des Körpers K und bilden für alle Substitutionen $t, t', t'', \ldots$, der Trägheitsgruppe die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} t\,A \equiv P^a\,A, \\ t'\,A \equiv P^{a'}\,A, \\ t''\,A \equiv P^{a''}\,A, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (\mathfrak{P}^2)$$

wo $a, a', a'', \ldots$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p^f - 2$ bedeuten. Diejenigen unter den Substitutionen $t, t', t'', \ldots$, für welche die betreffenden Exponenten $a, a', a'', \ldots$ den Werth 0 haben, mögen mit $v, v', v'' \ldots$ bezeichnet werden; ihre Zahl sei r_v; sie bilden, wie leicht ersichtlich, eine invariante Untergruppe der Trägheitsgruppe. Diese Untergruppe r_v ten Grades werde die Verzweigungs-

gruppe des Primideals $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_v bezeichnet. Der zu g_v gehörige Körper heisse der **Verzweigungskörper** des Primideals $\mathfrak{P}$.

Es sei $\mathfrak{P}^u$ eine so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$, daß für jede von 1 verschiedene Substitution v der Verzweigungsgruppe die Incongruenz $vA \not\equiv A$ nach $\mathfrak{P}^u$ gilt. Setzen wir nun $vA \equiv A + BA^2$ nach $\mathfrak{P}^2$, wo B eine ganze Zahl in K bedeutet, so folgt leicht $v^p A \equiv A$ nach $\mathfrak{P}^3$ und hieraus in gleicher Weise $v^{p^2} A \equiv A$ nach $\mathfrak{P}^4$ und endlich $v^{p^{u-2}} A \equiv A$ nach $\mathfrak{P}^u$. Demnach ist $v^{p^{u-2}} = 1$, d.h. der Grad r_v der Verzweigungsgruppe ist gleich einer Potenz von p; wir setzen $r_v = p^l$.

Es sei nun a der kleinste von 0 verschiedene unter den Exponenten $a, a', a'' \ldots$ und es gebe im ganzen h voneinander verschiedene solcher Exponenten. Dann sind diese Exponenten notwendig Vielfache von a und stimmen mit den Zahlen $0, a, 2a, \ldots, (h-1)a$ überein; es ist ferner $ha = p^f - 1$. Zugleich erkennen wir, daß alle Substitutionen der Trägheitsgruppe in die Gestalt $t^i v$ gebracht werden können, wo i die Werthe $0, 1, \ldots, h-1$ annimmt und v alle Substitutionen der Verzweigungsgruppe g_v durchläuft. Es ist folglich $r_t = h\, r_v$. Wir fassen wiederum die erhaltenen Sätze zusammen:

Die Verzweigungsgruppe g_v ist eine invariante Untergruppe der Trägheitsgruppe, der Grad r_v derselben ist eine Potenz von p. Der Grad der Trägheitsgruppe ist gleich dem $h$fachen Grade der Verzweigungsgruppe, wo h ein Theiler von $p^f - 1$ bedeutet und daher nicht den Factor p enthält. Man erhält die Substitutionen der Trägheitsgruppe, indem man die Substitutionen der Verzweigungsgruppe mit $1, t, t^2, \ldots, t^{h-1}$ multiplicirt, wo t eine geeignet gewählte Substitution der Trägheitsgruppe ist. t^h ist eine Substitution der Verzweigungsgruppe.

Das algebraische Verhältniß zwischen Trägheitskörper und Verzweigungskörper wird durch den folgenden Satz klargelegt:

Ist ϑ_v eine den Verzweigungskörper bestimmende Zahl, so genügt ϑ_v einer Gleichung $h$ten Grades von der Gestalt

$$\vartheta_v^h + \alpha_t \vartheta_v^{h-1} + \alpha_t' \vartheta_v^{h-2} + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten Zahlen des Körpers $\varkappa_t$ sind und welche im Rationalitätsbereiche $\varkappa_t$ eine Galois'sche

Gleichung mit der cyklischen Gruppe $h$ten Grades ist.

Um nun vor Allem Aufschluß über das Verhalten des Ideals $\mathfrak{p}$ im Körper $\varkappa_t$ zu gewinnen, setzen wir

$$\pi = \{vP \cdot v'P \cdot v''P \ldots\}^{p^{l(f-1)}}$$

$$\varrho = \frac{1}{h}(\pi + t\pi + t^2\pi + \cdots + t^{h-1}\pi).$$

Die Zahl π liegt im Körper $\varkappa_v$ und ϱ im Körper $\varkappa_t$; beide Zahlen sind nach dem Primideal $\mathfrak{P}$ der Primitivzahl P congruent. Da es folglich im Körper $\varkappa_t$ genau p^f nach $\mathfrak{P}$ incongruente Zahlen giebt, so ist nothwendigerweise $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{r_t}$ im Körper $\varkappa_t$ unzerlegbar und wird in demselben ein Primideal $f$ten Grades.

Die aus der eben angestellten Betrachtung folgenden Eigenschaften des Trägheitskörpers sprechen wir, wie folgt, aus:

Jede Zahl des Körpers K ist nach $\mathfrak{P}$ einer Zahl des Trägheitskörpers congruent. Der Trägheitskörper bewirkt keine Zerlegung des Ideals $\mathfrak{p}$, sondern nur eine Graderhöhung desselben, insofern $\mathfrak{p}$ beim Uebergang vom Körper $\varkappa_z$ in den höheren Körper $\varkappa_t$ aus einem Primideal ersten Grades sich in ein Primideal $f$ten Grades verwandelt.

Es sei die beliebige Zahl Ω in K der Zahl ω des Trägheitskörpers nach $\mathfrak{P}$ congruent und dementsprechend werde $\Omega - \omega \equiv BA$ nach $\mathfrak{P}^2$ gesetzt, wo A die obige Bedeutung hat und B eine geeignete ganze Zahl in K ist. Durch die Anwendung einer Substitution v des Verzweigungskörpers ergiebt sich $v\Omega - \omega \equiv v(BA) \equiv BA \equiv \Omega - \omega$ d. h. $v\Omega \equiv \Omega$ nach $\mathfrak{P}^2$ und wir erhalten so den Satz:

Die Substitutionen v der Verzweigungsgruppe g_v haben die charakteristische Eigenschaft, daß für sämmtliche Zahlen Ω des Körpers K die Congruenz

$$v\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P}^2)$$

besteht.

Zugleich erkennen wir leicht die folgenden weiteren Sätze über den Verzweigungskörper.

Das Ideal $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{P}^{p^l}$ liegt im Verzweigungskörper und ist in demselben ein Primideal $f$ten Grades: es findet somit im Verzweigungskörper die Spaltung des Ideals $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_v^h$ in h gleiche Primfactoren statt.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Spaltung des Ideals $\mathfrak{p}_v$ zu verfolgen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei L der höchste Exponent von der Art, daß für eine jede Substitution v der Verzweigungsgruppe die sämmtlichen ganzen Zahlen des Körpers K der Congruenz

$$v\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P}^L)$$

genügen und bestimmen dann alle diejenigen Substitutionen $\bar v$ der Verzweigungsgruppe, für welche

$$\bar v\,\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P}^{L+1})$$

wird; dieselben bilden eine invariante Untergruppe $g_{\bar v}$ der Verzweigungsgruppe, die wir die einmal überstrichene Verzweigungsgruppe nennen wollen. Der Grad derselben sei $r_{\bar v} = p^{\bar l}$. Die Eigenschaften dieser Untergruppe $g_{\bar v}$ lassen sich wiederum ohne besondere Schwierigkeit feststellen und führen, wenn der Kürze wegen der zu $g_{\bar v}$ gehörige Körper $\varkappa_{\bar v}$ der einmal überstrichene Verzweigungskörper genannt und $l - \bar l = \bar e$ gesetzt wird, zu den Sätzen:

Ist $\vartheta_{\bar v}$ eine den einmal überstrichenen Verzweigungskörper $\varkappa_{\bar v}$ bestimmende Zahl, so genügt $\vartheta_{\bar v}$ einer Abel'schen Gleichung $p^{\bar e}$ten Grades von der Gestalt

$$\vartheta_{\bar v}^{p^{\bar e}} + \alpha_v \vartheta_{\bar v}^{p^{\bar e}-1} + \alpha'_v \vartheta_{\bar v}^{p^{\bar e}-2} + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten Zahlen des Körpers $\varkappa_v$ sind und deren Gruppe lediglich Substitutionen $p$ten Grades enthält. Es wird $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}_{\bar v}^{p^{\bar e}}$, wo $\mathfrak{p}_{\bar v}$ Primideal des Körpers $\varkappa_{\bar v}$ ist. Der Exponent $\bar e$ überschreitet keinenfalls die Zahl f.

Nunmehr ist ersichtlich, in welcher Weise das eingeschlagene Verfahren fortzusetzen ist. Bedeutet $\bar L$ den höchsten Exponenten von der Art, daß für jede Substitution $\bar v$ die sämmtlichen Zahlen des Körpers K der Congruenz

$$\bar v\,\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P}^{\bar L})$$

genügen, so bestimmen wir alle diejenigen Substitutionen $\bar{\bar v}$, für welche

$$\bar{\bar v}\,\Omega \equiv \Omega \qquad (\mathfrak{P}^{\bar L+1})$$

wird. Dieselben bilden eine invariante Untergruppe $g_{\bar{\bar v}}$ der Gruppe

$g_{\bar{\bar{v}}}$, die zweimal überstrichene Verzweigugsgruppe; ihr Grade sei $r_{\bar{\bar{v}}} = p^{\bar{\bar{e}}}$; wir setzen $\bar{l} - \bar{\bar{l}} = \bar{\bar{e}}$. Es gelten die Sätze:

Ist $\vartheta_{\bar{\bar{v}}}$ eine den zweimal überstrichenen Verzweigungskörper $\varkappa_{\bar{\bar{v}}}$ bestimmende Zahl, so genügt $\vartheta_{\bar{\bar{v}}}$ einer Abel'schen Gleichung $p^{\bar{\bar{e}}}$ten Grades von der Gestalt

$$\vartheta_{\bar{\bar{v}}}^{p^{\bar{\bar{e}}}} + \alpha_{\bar{\bar{v}}} \vartheta_{\bar{\bar{v}}}^{p^{\bar{\bar{e}}}-1} + \alpha'_{\bar{\bar{v}}} \vartheta_{\bar{\bar{v}}}^{p^{\bar{\bar{e}}}-2} + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten Zahlen des Körpers $\varkappa_{\bar{v}}$ sind und deren Gruppe lediglich Substitutionen $p$ten Grades enthält. Es wird $\mathfrak{p}_{\bar{v}} = \mathfrak{p}_{\bar{\bar{v}}}^{p^{\bar{\bar{e}}}}$, wo $\mathfrak{p}_{\bar{\bar{v}}}$ Primideal des Körpers $\varkappa_{\bar{\bar{v}}}$ ist. Der Exponent $\bar{\bar{e}}$ überschreitet keinenfalls die Zahl f.

So fortfahrend gelangen wir zu einer dreimal überstrichenen Verzweigungsgruppe $g_{\bar{\bar{\bar{v}}}}$ u. s. w. Ist etwa die k mal überstrichene Verzweigungsgruppe diejenige, welche lediglich aus der Substitution 1 besteht, so ist der Körper K selbst der k mal überstrichene Verzweigungskörper und die Structur der Verzweigungsgruppe g_v ist dann vollständig bekannt.

Durch die vorstehende Entwickelung erlangen wir einen vollständigen Einblick in die bei der Zerlegung einer rationalen Primzahl p sich abspielenden Vorgänge:

Die rationale Primzahl p wird zunächst im Zerlegungskörper in der Form $p = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$ zerlegt, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades und $\mathfrak{a}$ ein durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbares Ideal des Zerlegungskörpers ist. Der Zerlegungskörper ist als Unterkörper in dem Trägheitskörper enthalten, welcher seinerseits keine weitere Zerlegung von $\mathfrak{p}$ bewirkt, sondern lediglich dieses Ideal $\mathfrak{p}$ zu einem Primideal f ten Grades erhebt. Ist der Körper K selbst der Zerlegungskörper oder der Trägheitskörper, so ist nach diesem ersten Schritte die Zerlegung bereits abgeschlossen. Im anderen Falle läßt sich $\mathfrak{p}$ in gleiche Factoren spalten und zwar wird $\mathfrak{p}$ zunächst im Verzweigungskörper die Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}_v$, deren Exponent in $p^f - 1$ aufgeht und folglich nicht durch p theilbar ist. Die Spaltung von $\mathfrak{p}$ ist mit diesem zweiten Schritte nothwendig dann und nur dann abgeschlossen, wenn p im Grade der Trägheitsgruppe nicht aufgeht und mithin der Körper K selbst der Verzweigungskörper ist. In den nun folgenden überstrichenen Verzweigungskörpern schreitet die Spaltung ohne Aussetzen fort und zwar sind die bezüglichen Potenzexponenten Zahlen von der Ge-

stalt $p^{\bar{e}}$, $p^{\bar{\bar{e}}}$, ..., wo $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$, ... die Zahl f nicht überschreiten. Der Trägheitskörper und der Verzweigungskörper sind durch cyklische Gleichungen, die überstrichenen Verzweigungskörper durch solche Abel'sche Gleichungen bestimmt, deren Gruppen nur Substitutionen vom Primzahlgrade p enthalten. Die Spaltung in gleiche Factoren geschieht also stets mittelst einer Kette Abel'scher Gleichungen. Dieses Resultat drückt eine neue überraschende Eigenschaft des Zerlegungskörpers aus:

Der Zerlegungskörper bestimmt einen Rationalitätsbereich, in welchem die Zahlen des ursprünglichen Galois'schen Körpers K lediglich durch Wurzelausdrücke darstellbar sind.

Der gefundene Satz rückt zugleich die Bedeutung der Theorie der durch Wurzelziehen lösbaren Gleichungen in grelles Licht, insofern derselbe zeigt, daß innerhalb der durch solche Gleichungen bestimmten Zahlkörper gerade die hauptsächlichsten Schwierigkeiten ihre Lösung finden, welche die Aufstellung der Primideale bietet.

Die Uebersicht über die aufgezählten Resultate wird durch die folgende Tabelle erleichtert, in deren Zeilen der Reihe nach die Grade der Gruppen, die Grade der Körper, die Grade der den Körper bestimmenden Abel'schen Gleichungen, dann die Primideale der Körper und ihre Zerlegung, bezüglich Spaltung sich angegeben finden. Der Körper K ist dabei als ein dreimal überstrichener Verzweigungskörper angenommen.

$\varkappa_z$	$\varkappa_t$	$\varkappa_v$	$\varkappa_{\bar{v}}$	$\varkappa_{\bar{\bar{v}}}$	K
r_z	r_t	r_v	$r_{\bar{v}}$	$r_{\bar{\bar{v}}}$	1
$m_z = \frac{M}{r_z}$	$m_t = \frac{M}{r_t}$	$m_v = \frac{M}{r_v}$	$m_{\bar{v}} = \frac{M}{r_{\bar{v}}}$	$m_{\bar{\bar{v}}} = \frac{M}{r_{\bar{\bar{v}}}}$	M
	$f = \frac{r_z}{r_t}$	$h = \frac{r_t}{r_v}$	$p^{\bar{e}} = \frac{r_v}{r_{\bar{v}}}$	$p^{\bar{\bar{e}}} = \frac{r_{\bar{v}}}{r_{\bar{\bar{v}}}}$	$p^{\bar{\bar{\bar{e}}}} = r_{\bar{\bar{v}}}$
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_v^h = \mathfrak{P}^{r_t}$		$\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}_{\bar{v}}^{p^{\bar{e}}} = \mathfrak{P}^{r_v}$	$\mathfrak{p}_{\bar{v}} = \mathfrak{p}_{\bar{\bar{v}}}^{p^{\bar{\bar{e}}}} = \mathfrak{P}^{r_{\bar{v}}}$	$\mathfrak{p}_{\bar{\bar{v}}} = \mathfrak{P}^{p^{\bar{\bar{\bar{e}}}}} = \mathfrak{P}^{r_{\bar{\bar{v}}}}$	$\mathfrak{P}$

Von den mannichfachen Folgerungen und Anwendungen, welche die vorstehend entwickelte Theorie zuläßt, seien hier nur einige erwähnt, welche die Erforschung der Discriminanten der betrachteten Zahlkörper bezwecken.

Es sei $\varkappa$ ein beliebiger Zahlkörper vom Grade m; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ mögen eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers $\varkappa$ bilden und die zu der Zahl ω conjugirten $m-1$ Zahlen bezeichnen wir allgemein mit $\omega', \ldots, \omega^{(m-1)}$. Das Product der $m-1$ Ideale

$$\begin{array}{lll}(\omega_1-\omega_1', & \omega_2-\omega_2', \ldots, & \omega_m-\omega_m')\,^{1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\omega_1-\omega_1^{(m-1)}, & \omega_2-\omega_2^{(m-1)}, \ldots, & \omega_m-\omega_m^{(m-1)})\end{array}$$

ist ein Ideal des Körpers $\varkappa$ und stimmt mit demjenigen überein, welches R. Dedekind das Grundideal dieses Körpers nennt. R. Dedekind hat bewiesen, daß die Norm des Grundideals die Discriminante des Körpers liefert[2]).

Es seien $s_1 = 1, s_2, \ldots, s_r$ die r Substitutionen einer Untergruppe g der Gruppe G und $\varkappa$ sei der zu g gehörige Körper. Sind dann $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$ eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers K und bildet man alle r-reihigen Determinanten $\Delta, \Delta', \ldots$ der Matrix

$$\begin{array}{lll}s_1\Omega_1, & s_1\Omega_2, \ldots, & s_1\Omega_M, \\ s_2\Omega_1, & s_2\Omega_2, \ldots, & s_2\Omega_M, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_r\Omega_1, & s_r\Omega_2, \ldots, & s_r\Omega_M,\end{array}$$

so wird das Quadrat des größten gemeinsamen Idealtheilers der Zahlen $\Delta, \Delta', \ldots$ die Partialdiscriminante[3]) des Körpers K in Bezug auf den Körper $\varkappa$ genannt. Bei Benutzung der von mir angewandten Bezeichnungsweise ist diese also

$$\mathfrak{d} = (\Delta, \Delta', \ldots)^2 = (\Delta^2, \Delta'^2, \ldots).$$

Die Partialdiskriminante $\mathfrak{d}$ ist ein Ideal, welches im Körper $\varkappa$ liegt.

---

1) Wegen dieser schon mehrmals von mir angewandten Bezeichnungsweise der Ideale vgl. Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale. Math. Ann. B. 44.

2) Der nämliche Satz folgt auch auf Grund der schönen Untersuchungen, durch welche neuerdings K. Hensel die Kroneckersche Theorie der algebraischen Zahlen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt hat. Vgl. Journ. für Math. B. 113.

3) Dieser Begriff der Partialdiscriminante stimmt im wesentlichen mit dem von Kronecker aufgestellten allgemeinen Discriminantenbegriffe überein, vgl. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. § 8.

Auch der Dedekind'sche Begriff des Grundideals bedarf einer Verallgemeinerung: wir verstehen unter dem Partialgrundideal $\mathfrak{G}_\varkappa$ des Körpers K in Bezug auf $\varkappa$ das Product der folgenden $r-1$ Ideale

$$\mathfrak{E}_2 = (\Omega_1 - s_2\Omega_1,\ \Omega_2 - s_2\Omega_2, \ldots,\ \Omega_M - s_2\Omega_M),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_r = (\Omega_1 - s_r\Omega_1,\ \Omega_2 - s_r\Omega_2, \ldots,\ \Omega_M - s_r\Omega_M).$$

Es gelten die drei allgemeinen Theoreme:

$$\text{I. } \mathfrak{d} = \nu(\mathfrak{G}_\varkappa),$$
$$\text{II. } \mathfrak{G} = \mathfrak{g}\mathfrak{G}_\varkappa,$$
$$\text{III. } D = d^r n(\mathfrak{d});$$

hierin bedeuten D, d, $\mathfrak{d}$, bezüglich die Discriminanten der Körper K, $\varkappa$ und die Partialdiscriminante des Körpers K in Bezug auf $\varkappa$, ferner $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}_\varkappa$ bezüglich die Grundideale von K, $\varkappa$ und das Partialgrundideal des Körpers K in Bezug auf $\varkappa$; endlich bedeutet $\nu(\mathfrak{G}_\varkappa)$ die Partialnorm von $\mathfrak{G}_\varkappa$ und $n(\mathfrak{d})$ die Norm von $\mathfrak{d}$ für den Körper $\varkappa$. Diese Theoreme geben einen klaren Einblick in den Bau der Discriminanten. Das Theorem I ist die Erweiterung des Dedekind'schen Satzes für den Begriff des Partialgrundideals. Nach Theorem II ist das Verhalten der Grundideale beim Uebergange von dem niederen in den höheren Körper von merkwürdiger Einfachheit: man bekommt das Grundideal des höheren Körpers, indem man das Grundideal des niederen Körpers mit dem betreffenden Partialgrundideal multiplicirt. Das Theorem III entsteht, wenn man von der Gleichung II die Norm bildet. Daß die Discriminante eines Körpers durch die Discriminante eines jeden Unterkörpers theilbar ist, hat bereits Kronecker[1]) bewiesen. Das Theorem III giebt die Potenz der letzteren an, welche in der Discriminante des höheren Körpers aufgeht und deckt auch zugleich die einfache Bedeutung des übrig bleibenden Factors der Discriminante des höheren Körpers auf.

Nunmehr folgen mit Hülfe der oben entwickelten Theorie die Sätze:

Das Grundideal des zum Primideal $\mathfrak{P}$ gehörigen Trägheitskörpers ist nicht durch $\mathfrak{P}$ theilbar. Der Trägheitskörper umfaßt sämmtliche in K enthaltenen Unterkörper, deren Grundideale nicht durch $\mathfrak{P}$ theilbar sind.

---

1) Vergl. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen § 9.

Das Partialgrundideal des Verzweigungskörpers in Bezug auf den Trägheitskörper ist durch

$$\mathfrak{P}^{r_t - r_v} = \mathfrak{p}_v^{h-1}$$

und durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{P}$ theilbar.

Das Partialgrundideal des einmal überstrichenen Verzweigungskörpers in Bezug auf den Verzweigungskörper enthält genau die Potenz

$$\mathfrak{P}^{L(r_v - r_{\bar v})} = \mathfrak{p}_{\bar v}^{L(p^{\bar e}-1)}$$

Das Partialgrundideal des zweimal überstrichenen Verzweigungskörpers in Bezug auf den einmal überstrichenen Verzweigungskörper enthält genau die Potenz

$$\mathfrak{P}^{\bar L(r_{\bar v} - r_{\bar{\bar v}})} = \mathfrak{p}_{\bar{\bar v}}^{\bar L(p^{\bar{\bar e}}-1)}$$

u. s. w.

Das Grundideal $\mathfrak{G}$ des Körpers K enthält das Primideal $\mathfrak{P}$ genau in der

$$r_t - r_v + L(r_v - r_{\bar v}) + \bar L(r_{\bar v} - r_{\bar{\bar v}}) + \cdots$$

ten Potenz.

Da nun K ein Galois'scher Körper ist und mithin das Grundideal $\mathfrak{G}$ mit seinen conjugirten übereinstimmt, so ist die Diskriminante D von K die Mte Potenz von $\mathfrak{G}$; D enthält folglich das Primideal $\mathfrak{P}$ genau M mal so oft. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Der Exponent der Potenz, zu welcher die rationale Primzahl p in der Discriminante D des Körpers K als Factor vorkommt, ist

$$m_t \left\{ r_t - r_v + L(r_v - r_{\bar v}) + \bar L(r_{\bar v} - r_{\bar{\bar v}}) + \cdots \right\}.$$

Im Falle, daß keine überstrichenen Verzweigungskörper vorhanden sind, wird $r_v = 1$, $r_{\bar v} = 1, \ldots$ und es folgt dann das von R. Dedekind und K. Hensel bewiesene Resultat, demzufolge der Exponent der in D aufgehenden Potenz von p den Werth $m_t(r_t - 1)$ besitzt.

Da man für die Exponenten $L, \bar L, \ldots$ ohne Schwierigkeit eine obere Grenze findet, so kann hiernach auch der eben bestimmte Exponent der in der Discriminante D aufgehenden Potenz von p eine gewisse nur vom Grade M des Körpers K abhängige Grenze nicht überschreiten. Dieser Satz ist besonders deßhalb von Wichtigkeit, weil er die Möglichkeiten, die sich hinsichtlich der in M aufgehenden Primzahlen p bieten, von vornherein auf eine endliche Anzahl einschränkt. Rechnen wir demnach alle diejenigen Körper vom Grade M, welche hinsichtlich der in M aufgehenden Primzahlen das nämliche Verhalten zeigen, zu einem Typus, so folgt, daß es für einen gegebenen Grad M nur eine endliche Anzahl von möglichen Körpertypen giebt.

Königsberg in Pr. den 25. Juni 1894.

Neue photographische Registrirmethode für die Zeit und den Stand von Magneten in Magnetometern und Galvanometern.

Von

K. Schering und **C. Zeissig.**

Vorgelegt von Ernst Schering in der Sitzung am 7. Juli 1894.

Die in erdmagnetischen Observatorien aufgestellten photographischen Apparate registriren bisher die erdmagnetischen Variationen allgemein in der Weise, daß als Resultat eine Curve auf dem photographischen Papier erhalten wird. Der senkrechte Abstand eines Punktes P der Curve von der in der Regel gleichzeitig photographirten geraden Linie, der „Nulllinie", ist proportional dem Drehungswinkel des Magneten, von seiner „Nulllage" an gerechnet, während die auf der Nulllinie gemessene Abscisse des Punktes P die dazu gehörige Zeit angiebt. Um diese Zeit leichter ermitteln zu können, pflegt die Nulllinie alle volle Stunden für eine kurze Strecke unterbrochen zu sein.

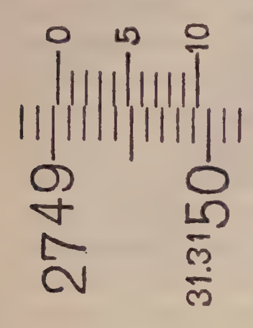
Eine so photographisch erhaltene Curve gestattet allerdings die während eines Tages von dem Magneten in dem betreffenden Instrumente ausgeführten Bewegungen mit einem Blicke zu überschauen und daher sofort zu erkennen, ob und zu welchen Tageszeiten größere Schwankungen stattgefunden haben. Andererseits aber haben die Abmessungen an einer solchen Curve nicht diejenige Genauigkeit, welche durch directe Ablesungen nach der Gauss'schen Methode mit Fernrohr, Spiegel und Scala erhalten werden kann. Nach dieser Methode liest ein Beobachter zu einer bestimmten Secunde den Stand des Magneten bis auf Bruchtheile eines Scalentheils genau ab, während bei den Abmessungen an der Curve besonders die Zeitbestimmung beträchtlich ungenau ist. Diejenige Strecke der Nulllinie nämlich, welche der Zeit von einer Stunde entspricht, hat an den Apparaten der erdmagnetischen Observatorien eine verhältnißmäßig geringe Länge: 10 oder 15

oder 20 mm, aber, auch den letzteren Fall angenommen, so sind doch die Werthe für ein Zeitintervall von 3 Minuten auf 1 mm zusammengedrängt, sodaß eine Ablesung bis auf 0,3 Minuten, gleich 20 Secunden, sehr unsicher ist. Dazu kommt dann noch eine Ungenauigkeit, welche durch eine Aenderung des Abstandes der Curve von der Nulllinie bei dem Trocknen des Papiers nach dem Entwickeln herbeigeführt wird.

Für alle Untersuchungen aber, welche sich auf die Zeit des Eintretens der erdmagnetischen Störungen beziehen, ist es unbedingt erforderlich, daß an den erdmagnetischen Observatorien die Zeiten der registrirten Scalenstände der Magnete bis auf die Secunde genau bekannt sind. Erst dann ist es möglich, mit Aussicht auf Erfolg an die Beantwortung der Frage heranzutreten, ob wirklich alle erdmagnetischen Störungen, sowohl die großen wie die kleineren, an verschiedenen Punkten der Erde genau gleichzeitig auftreten, oder ob, wenn dieses nicht der Fall ist, solche Störungen etwa von den Polargegenden der Erde ausgehen und mit welcher Geschwindigkeit dieselben sich fortpflanzen. Herr W. Ellis hat sich in der Abhandlung in den Proc. of the Roy. Soc. of London Vol. 51, p. 445–446, 1892 und Vol. 52, p. 191—212, 1892 mit dieser Frage beschäftigt und gelangt bei Vergleichung der photographischen Curven mehrerer erdmagnetischen Observatorien zu dem Resultate, daß die Zeiten des Beginns größerer Schwankungen der erdmagnetischen Elemente für verschiedene Orte sich um mehrere Secunden bis zum Betrage einiger Minuten von einander unterscheiden können. Der Verf. selbst fügt aber hinzu (s. Vol. 51, p. 446) daß definitive Resultate erst dann erhalten werden können, wenn auf die Genauigkeit der „Zeit-Scala“ an den erdmagnetischen Observatorien größerer Werth gelegt würde.

Aus diesen Gründen erschien es uns wünschenswerth, eine Methode der photographischen Registrirung aufzusuchen, deren Resultate eine größere Genauigkeit der Ablesung gestatten als die bisherige Methode, ja wenn möglich, als die directe Beobachtung mit Fernrohr, Spiegel und Scala. Die zu diesem Zwecke ausgeführten Versuche sind zu einem gewissen Abschluß gelangt und wir erlauben uns jetzt der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eine photographische Originalplatte vorzulegen, auf welcher sich eine große Anzahl (150) kleiner Photographien einer Millimeterscala befinden. Jede derselben ist nahe 1 mm lang und 1,5 mm breit; sie liegen (bei etwa 0,1 mm Abstand von einander) so nahe zusammen, daß auf die Fläche eines Quadratcentimeters nahe 50 Bilder kommen. Wenn man dieselben mit einem etwa 25 mal ver-

größernden Mikroskope betrachtet, erscheinen die Millimeter in nahe doppelter Größe. Die Figur 1 stellt ein solches vergrößertes Bild dar.



Figur 1.

Die Scala, zu welcher die Zahlen 49 und 50 gehören und von welcher 14 bis 15 Striche photographirt werden, ist von dem beweglichen Spiegel eines Magnetometers reflectirt. Diese Striche reichen in allen Fällen zur Ablesung aus, auch dann, wenn nur eine Zahl der Scala sichtbar ist; denn man weiß, daß die Ziffern an der Scala nach derselben Richtung hin wachsen wie diejenigen am Nonius. Diesen Nonius sieht man auf dem Bilde oberhalb der Scala; ferner stehen unter der Scala die Zahlen 31 und 27; dieselben ergeben in Minuten und Secunden den Zeitmoment der photographischen Aufnahme. An dem beistehenden Bilde liest man also ab:
„Zur Zeit $*^h\,31^m\,27^s$ war der Stand des Magneten 490,3 Scalentheile“.

Auf die Angabe auch der Stunden in den photographischen Bildern glaubten wir zunächst verzichten zu können, da man nach einmaliger Einstellung der Apparate über die Stunde nicht in Zweifel sein kann. Die Vergrößerung der Bilder zur Ablesung kann beliebig gewählt werden; da der Nonius immer in gleichem Maasstabe vergrößert wird, so kann man immer bis auf 0,1 mm genau ablesen, also genauer, als bei der directen Ablesung an dem Verticalfaden des Fadenkreuzes in einem Fernrohr, an welchem die Zehntel Millimeter nur geschätzt werden können. Die einzelnen Bilder auf der Platte folgen aufeinander in Zeitintervallen von durchschnittlich etwa 10 Secunden, sodaß man während 3 Minuten zu 18 verschiedenen genau bestimmten Zeiten den Stand des Magneten im Apparate bis auf Zehntel Scalentheile genau erhält. Hierdurch ist die Ueberlegenheit der neuen Methode über die bisherige wohl am deutlichsten characterisirt.

Um zu zeigen, daß auch bei verhältnißmäßig raschen Standänderungen des Magneten gute Bilder erhalten werden, haben wir während der Zeit, in welcher die auf der Platte zu sehenden Bilder photographirt wurden, in der Nähe des Magnetometers einen Magneten bewegt. Die größten dadurch verursachten Standänderungen betragen nahe 22 Scalentheile und entsprechen bei dem von uns gewählten Scalenabstande von 3910 mm einer Drehung des Spiegels von 9′,67. Solche Bilder würden also mit einem Variationsapparate für die magnetische Declination erhalten werden, wenn dieselbe

um den Betrag von rund 10′ innerhalb einer Zeit von 2—3 Minuten sich änderte und diese Schwankung fortdauernd wiederholte. Solche Aenderungen würden eine schon recht starke erdmagnetische Störung bedeuten, zwar nicht in Bezug auf die Größe der Schwankung, worauf es ja hier nicht ankommt, aber in Bezug auf die Schnelligkeit derselben. Trotzdem sind die Bilder bis auf Zehntel Millimeter genau abzulesen. Nur dann, wenn der Apparat sich während der Expositionszeit von 1 Secunde gleichförmig um 1 Scalentheil (gleich 26″ in unserem Falle) oder etwas mehr dreht, können die Zehntel Millimeter nicht mehr direct am Nonius erkannt werden. Da man dann aber noch die längeren Fünfer- und Zehner-Theilstriche und die Zahlen der Scala, wenn auch verbreitert, erkennt, so kann man den Abstand des Nullstrichs des Nonius von der Mitte des nächsten längeren Striches, sowie auch den Abstand der Mitte zweier benachbarter längeren Striche mit einem Kathetometer ausmessen und so den Stand des Instruments für die Mitte der Expositionszeit ermitteln[1]). Uebrigens kommen solche außerordentlich schnell eintretenden Standänderungen (also 26″ in 1 Sec., demnach bei gleichförmiger Bewegung 26′ in 1 Min.) wenigstens bei erdmagnetischen Variationsapparaten, die außerdem von starken Kupferdämpfern umgeben sind, in unseren Breiten nur selten vor. In höheren Breiten wird man den Scalen-Abstand kleiner wählen.

Um aber bei solchen raschen Drehungen des Spiegels die Zahlen der Scala, wie erwähnt, erkennen zu können, haben wir dieselben verhältnißmäßig groß gewählt, und um zu verhindern, daß das Bild der einen Ziffer durch das der benachbarten undeutlich gemacht wird, sind die Zahlen so an die Scala geschrieben, wie die Figur 1 es zeigt. Zugleich hatten wir dabei den Zweck im Auge, die Fläche des Bildes so klein wie möglich zu machen. Für die Ablesung ist es vielleicht manchem bequemer, die ganze Platte und dadurch alle Bilder um 90° zu drehen.

Die Einrichtungen, welche zur Herstellung dieser Bilder getroffen wurden, sind folgende. In der Figur 2, welche eine Ansicht der Apparate von oben und eine schematische Seitenansicht giebt, bedeutet SS' die zu photographirende horizontale Scala. Sie besteht aus einem, auf der einen Fläche versilberten, Glasstreifen; in die Silberschicht sind die Ziffern und Millimeter-Striche eingeritzt. Sie wird durch eine hinter ihr in nahe 3 cm Abstand be-

---

1) Auf der, der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten Platte befinden sich auch einige Bilder, welche diesen Fall veranschaulichen; es wurde dabei absichtlich der ablenkende Magnet kurz vor der Belichtung rasch bewegt.

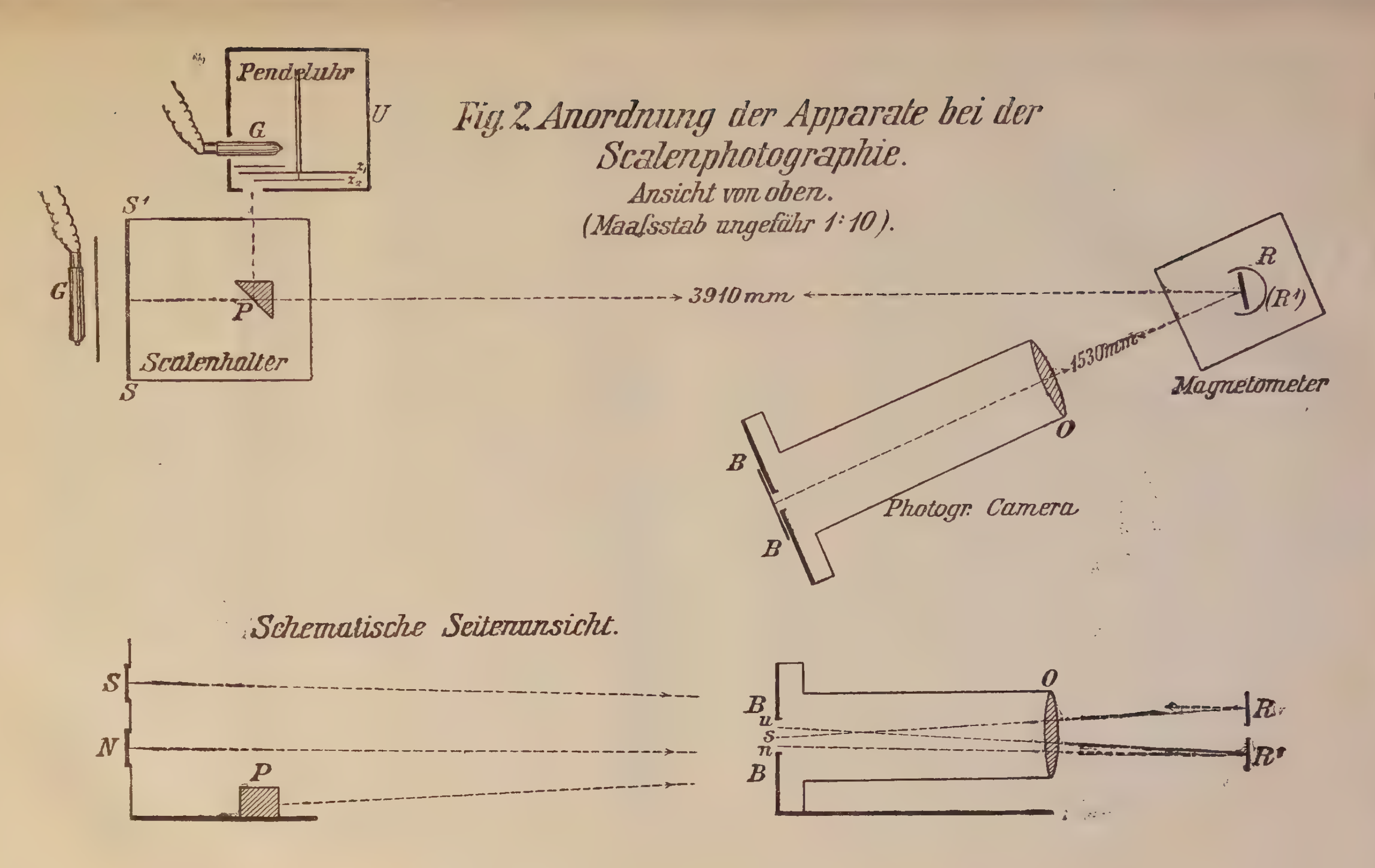


Fig. 2 Anordnung der Apparate bei der Scalenphotographie. Ansicht von oben. (Maafsstab ungefähr 1:10).

festigte elektrische Glühlampe beleuchtet, deren blendendes, von den beiden parallel geführten Kohle-Fäden ausgestrahltes, Licht durch eine zwischen Lampe und Scala stehende Platte aus mattem Glase diffus gemacht ist, um eine gleichmäßige Beleuchtung der Scala zu erhalten. Ihr, von dem beweglichen Spiegel *R* (der mit dem am Coconfaden hängenden Magneten fest verbunden ist) reflectirtes, Bild fällt durch das photographische Objectiv *O* auf die lichtempfindliche Platte *BB*, nachdem es durch einen, nahe 1 mm breiten Spalt soweit abgeblendet ist, daß nur 14 bis 15 Scalentheile photographirt werden. Der Abstand der Scala *S* von dem Spiegel *R* betrug 3910 mm; wenn sich daher der Magnet um einen Winkel von 26″,38 dreht, ändert sich die Ablesung an der Scala um 1 mm. Die Entfernung des Spiegels *R* von der photographischen Platte *BB* betrug 1530 mm. Da die einzelnen Bilder nur nahe 1,5 qmm groß sind, so werden nur Centralstrahlen benutzt und daher an das Objectiv keine großen Anforderungen gestellt. Die Photographien auf der vorgelegten Platte sind mit einem älteren Pariser Portrait-Objectiv von 75 mm Durchmesser und nahe 350 mm Brennweite erhalten; auch ein Objectiv von Zeiss (Anastigmat-Satzlinse) von 42 mm Durchmesser und 530 mm Brennweite haben wir mit Vortheil benutzt. Es gab entsprechend der größeren Brennweite beträchtlich größere Bilder und es wird sich daher empfehlen, um nicht allzugroße Platten für die Registrirungen eines Tages anwenden zu müssen, Objective von höchstens 350 mm Brennweite zu wählen. Auf der vorgelegten Platte nehmen, wie erwähnt, 50 Bilder sehr nahe die Fläche von 1 qcm ein; wenn nun alle 10 Secunden photographirt wird, sodaß man während eines Tages 8640 Bilder erhält, so nehmen diese nur die Fläche eines Quadrats von 13,2 cm Seite ein oder, wenn man die während einer Viertelstunde erhaltenen 90 Bilder in eine Zeile anordnet, die Fläche eines Rechtecks von 12 cm Länge und 14 cm Höhe. Jedenfalls lassen sich also diese 8640 Bilder eines Tages auf einer mäßig großen photographischen Platte anordnen.

Man wird auch Objective von noch kürzerer Brennweite wählen können, sodaß die Bilder noch kleiner werden und daher diejenigen von einem Tage auf eine noch kleinere Fläche zusammengedrängt werden können.

Nahe 5 cm unter der Scala *S* befindet sich die Nonius-Scala *N*, die analog wie die Scala *S* hergestellt ist und beleuchtet wird. Das Licht derselben fällt auf einen zweiten nahe unter *R* angebrachten feststehenden Spiegel *R'*, der mit passenden Schrauben so eingestellt wird, daß das von ihm reflectirte Bild des Nonius

ebenfalls in das Objectiv *O* fällt und in richtiger Weise bei *n* ganz nahe unter dem Bilde *s* der Scala erscheint.

Auf den concentrischen Achsen der Pendeluhr *U* sind, nachdem die drei Uhrzeiger (Stunden-, Minuten- und Secunden-Zeiger) sowie das Zifferblatt abgenommen waren, zwei mit dem Uhrwerk sich drehende Scheiben befestigt, nämlich:

1) eine, aus einer Glasplatte von 14,4 cm Durchmesser und nahe 0,1 cm Dicke bestehende und auf einer Fläche versilberte Minutenscheibe, welche während einer Stunde sich einmal herumdreht. In deren Silberschicht sind die Minutenzahlen eingeritzt, sodaß die unteren Enden der Ziffern auf der Peripherie eines Kreises von 12,4 cm Durchmesser angeordnet und die oberen Enden der Ziffern dem Mittelpunkte der Zeigerscheibe zugewandt sind. Jede Minutenzahl ist zweimal neben einander geschrieben, um zu erreichen, daß auf der Photographie eines Scalenbildes, mag dieselbe in einem Moment während der ersten Hälfte oder während der zweiten Hälfte einer Minute aufgenommen sein, immer die Minutenzahl abzulesen ist.

2) eine kreisförmige, auf der einen Fläche versilberte Glimmerplatte von 11,8 cm Durchmesser und 0,02 cm Dicke, die „Secundenscheibe“, die nach jeder Secunde um 6^0 weiter springt. Diese Bewegung dauert 0,2 Secunden an; dann bleibt die Scheibe 0,8 Sec. ruhig stehen. In die Silberschicht sind die Secundenzahlen eingeritzt, und zwar so, daß die geraden Zahlen auf einem Durchmesser von 11 cm, die ungeraden auf einem kleineren Kreise von 10 cm Durchmesser angeordnet sind. Die Minuten- und Secundenscheibe sind durch einen vorgesetzten Kasten verdeckt. Nur durch eine in diesem Kasten vor dem linken Rande der Scheiben angebrachte rechteckige Oeffnung sind zwei Minutenzahlen und eine Secundenzahl sichtbar; sie werden analog wie die Scalen durch eine dahinter befindliche Glühlampe belichtet. Man liest hier z. B. zu den Zeiten:

$31^{m}\ 0^{s}$ $31^{m}\ 15^{s}$ $31^{m}\ 30^{s}$ $31^{m}\ 45^{s}$

ab:

Es ist ersichtlich, daß es hierdurch möglich geworden ist, einen bestimmten Zeitmoment photographisch zu fixiren, ohne andererseits das Werk der Uhr erheblich mehr zu belasten als

bei der gewöhnlichen Anordnung mit festem Zifferblatt und beweglichen Zeigern. Es war daher auch nicht nothwendig, das Gewicht der Pendeluhr größer zu nehmen als es früher war. Natürlich kann man auch die Stundenzahlen in analoger Weise photographiren; wir haben zunächst darauf verzichtet und nur zur directen Ablesung noch eine kleine Holzscheibe auf die Achse der Uhr aufgesteckt, auf deren Peripherie die Stundenzahlen geschrieben waren. Da sich diese Scheibe vor einem festen Zeiger vorbeibewegt, so kann die Stunde abgelesen werden.

Um die in der rechteckigen Oeffnung des Kastens erscheinenden Minuten- und Secundenzahlen auf der photographischen Platte erscheinen zu lassen, war in P auf einem kleinen Dreifuß mit Fußschrauben ein totalreflectirendes Prisma aufgestellt, in derselben Höhe wie die rechteckige Oeffnung des Kastens und mit Hülfe seiner Fußschrauben so regulirt, daß die Bilder der Zahlen von dem schon oben (S. 242) erwähnten festen Spiegel R' des Magnetometers reflectirt wurden und in der Ebene des kleinen Diaphragma auf der photographischen Platte BB bei u so nahe wie möglich den Ziffern der Scala s erschienen.

Zum Zweck dieser Einstellung, sowie überhaupt zur Beobachtung des von dem Objectiv O entworfenen kleinen Bildes wurde nicht eine Mattscheibe, sondern eine Einstell-Loupe benutzt.

Wir haben die Anordnung der Uhrziffern auf den Bildern so getroffen (s. Figur 1 S. 239), daß die Minutenziffern unten rechts, die Secundenziffern links stehen, während die Zahlen auf Scala und Nonius von links nach rechts wachsen. Vielleicht ist es manchem bequemer, auch die Uhr von links nach rechts abzulesen, sodaß links die Minuten, rechts die Secunden stehen. Das ist einfach dadurch zu erreichen, daß die rechteckige Oeffnung in dem Uhrkasten nicht, wie bei uns, am linken sondern am rechten Rande der Uhrscheiben angebracht ist (s. Figur 2 S. 241), vorausgesetzt, daß man die Richtung wachsender Zahlen der Scala nicht ändert.

Da die Zeit der Belichtung 1 Sec. dauert, so kann es vorkommen, daß zwei Secundenzahlen photographirt werden. Man mußte daher vermeiden, daß diese auf der Photographie sich deckten und dadurch undeutlich wurden. Aus diesem Grunde waren, wie schon erwähnt, die Secundenzahlen abwechselnd in größerer und kleinerer Entfernung vom Centrum der Secundenscheibe auf dieselbe eingeritzt, sie können daher auf der Photographie neben einander erscheinen. Wenn z. B. auf der in der Fig. 1 dargestellten Photographie statt der Secundenzahl 27 die beiden Zahlen 28 27 gleich dunkel zu sehen sind, so hat die Ex-

position in dem Momente begonnen, in welchem die Zahl 27 schon während 0,4 Sec. ruhig stand und hat dann angedauert während der noch übrigen 0,4 Sec. der Ruhe der Secundenscheibe, ferner während der 0,2 Sec. ihrer Bewegung und während die Zahl 28 0,4 Sec. lang hinter der rechteckigen Oeffnung des Uhrkastens ruhig stand. Ist 27 dunkler als 28, so begann die Exposition in einem etwas früheren Momente; ist 28 dunkler als 27, so begann sie etwas später. Aus diesen Unterschieden in der Schwärze der beiden Secundenzahlen kann man also die Mitte der Expositionszeit sogar bis auf Bruchtheile einer Secunde schätzen. Die vorgelegte Platte bietet mehrere Beispiele hierfür.

Wir benutzten ein Pendel, um immer gleiche Belichtungsdauern zu erhalten; dasselbe wurde bis zu einem bestimmten Anschlag aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht, dann losgelassen, und während es eine Schwingung hin und her zurücklegte, schloß es vermittelst eines Schleifcontactes den galvanischen Strom und brachte so die Glühlampen zum Brennen. Da diese nur durchschnittlich alle 10 Secunden eine Secunde lang brannten, so trat keine merkliche Erwärmung weder der Scala noch der Uhr ein; und man kann daher ohne Bedenken eine gute astronomische Uhr zu dieser Methode benutzen. Diese Beleuchtung der Scalen und der Uhr führt also auch keine merkliche Erwärmung des Raumes herbei; das ist z. B. bei erdmagnetischen Registrirapparaten ein nicht zu unterschätzender Vortheil.

Wir haben auch Versuche mit dem Auer'schen Gasglühlicht ausgeführt; aber es ergab das elektrische Licht weit bessere Resultate. Außerdem müssen natürlich die Gaslampen dauernd brennen und dadurch tritt eine beträchtliche Erwärmung ein.

Man braucht nicht zu befürchten, daß der die Glühlampen erregende galvanische Strom die Magnete ablenkt; abgesehen von der geringen Intensität desselben kann er durch concentrische Drähte zu den Glühlampen hin und zurück geführt werden, sodaß, von den Magneten aus gesehen, die vom Strome umkreiste Fläche verschwindend klein ist, zumal man ja mit den Drähten und den Glühlampen immer in einer Entfernung von mehreren Metern von den Magneten bleiben wird.

Am besten eignen sich zu dieser Methode solche Glühlampen, in denen die beiden Kohlefäden parallel geführt sind; die Höhe derselben ist dann, nachdem man zu diesem Zwecke die zwischen Scala und Glühlampe stehende mattirte Glasplatte fortgenommen hat, so zu reguliren, daß der eine Faden die Theilstriche der Scala, der andere die Ziffern hell beleuchtet. Durch solche Glüh-

lampen mit hinreichend langen Fäden, oder durch mehrere neben einander befestigte kann man beliebig lange Scalen ganz gleichmäßig beleuchten.

Bei größeren Standänderungen wird der Abstand des betreffenden Scalentheils von dem Spiegel größer als für den mittleren Scalentheil. Man braucht aber nicht zu befürchten, daß dadurch das photographirte Bild undeutlich wird; z. B. für die von uns gewählten Entfernungen berechnet man leicht, daß erst bei Schwankungen bis zu 6^0 die photographische Platte um 0,2 mm verschoben werden müßte. Directe Versuche ergaben, daß so kleine Verschiebungen keinen Unterschied in der Deutlichkeit der Bilder zur Folge haben.

Wir haben bei den Vorversuchen auch andere Scalen benutzt: Milchglasscalen oder Scalen auf mattem Glas, bei denen also die Theilstriche dunkel auf hellem Grunde erschienen; dann versuchten wir berußte Scalen mit darin eingeritzten Theilstrichen. Am zweckmäßigsten erwiesen sich aber die schließlich angewandten Glasscalen mit Silberniederschlag auf der einen Fläche. Die Ziffern der Scala und des Nonius sowie die Uhrziffern sind in die Silberschicht mit einem Apparate eingeritzt, welcher nach dem Muster des Repsold'schen in der Zeitschrift für Instrumentenkunde (Jahrg. VII, 1887, S. 396) beschriebenen und abgebildeten Instruments in der Werkstätte des Physikalischen Instituts angefertigt ist.

— Unsere bisher getroffenen Einrichtungen unterscheiden sich nur dadurch noch von einem definitiven nach der hier angegebenen Methode photographisch registrirenden Apparate, daß wir bis jetzt noch die Auslösung des Pendels zur Herstellung des Stromschlusses und der dadurch bewirkten Belichtung der Scalen und der Uhr während 1 Sec., und ferner die Verschiebung der photographischen Platte um nahe 1 mm während der Pause zwischen zwei Belichtungen mit der Hand ausführten. Jetzt, nachdem die Möglichkeit solcher photographischen Registrirungen der Zeit und des Scalenstandes nachgewiesen ist, beabsichtigen wir einen Apparat anfertigen zu lassen, welcher durch ein Uhrwerk getrieben, selbstthätig die Bewegung der Platte ausführt und dann alle 10 oder 20 Sec. einen Stromschluß 1 Sec. lang herstellt. Man wird natürlich das hierzu nöthige Laufwerk unabhängig von der Uhr machen, deren Zeitangabe photographirt werden soll, sodaß für diese letztere auch die sorgfältigst gearbeitete astronomische Uhr gewählt werden kann. Wenn dann jenes Laufwerk, das größere Massen in Bewegung zu setzen hat, nicht genau regulirt sein

sollte, so würden dadurch die Zeitmomente für die auf der photographischen Platte abzulesenden Scalenstände der Magnete mit keiner Ungenauigkeit behaftet sein, da ja immer diese von der Uhr angegebenen Zeitmomente gleichzeitig photographisch registrirt werden.

Ob man für die definitive Einrichtung photographische Platten oder eins der empfindlichen photographischen Papiere benutzt, wird von nebensächlicher Bedeutung sein. Wir haben mit Weisbrod- und Sachs-Platten gearbeitet und auch mit Eastman Films Scalenphotographien erhalten. Bei Anwendung von Eastman Films kann man dasselbe auf eine von dem Laufwerke in Drehung zu versetzende und dabei sich vorwärts schraubende Walze spannen, sodaß die Bilder auf Spirallinien angeordnet sind. Benutzt man Trockenplatten, so müssen dieselben durch das Laufwerk parallel hin und her und von oben nach unten geführt werden.

Zur Ablesung ist es bequem, die Platte vertical so zu befestigen, daß sie längs einer z. B. horizontalen Schiene mit Schraube und Zahnstange verschoben werden kann, während das auf die Platte gerichtete Mikroskop von oben nach unten bewegt wird. Die Platte muß natürlich vor einem hellen Hintergrund sich befinden, am besten in der Nähe eines Fensters oder einer Lampe.

Wenn man mehrere Apparate, z. B. die erdmagnetischen Variationsapparate für diese Methode einrichtet, wird es zweckmäßig sein, die Uhrzeiten nicht auf jeder Platte zu photographiren. Es wird sich vielmehr empfehlen eine besondere „Zeitplatte“ einzuführen, auf welcher nur die Uhr photographirt wird. Ein und dasselbe Laufwerk muß dann die gleichzeitige und gleich große Bewegung aller Platten, auch der Zeitplatte, und ferner den gleichzeitigen Schluß des Stromes für die Glühlampen aller Scalen und Nonien und der Uhr ausführen. Man hat dann für alle Apparate genau die gleichen Expositionszeiten. Die einzelnen Zeilen einer Platte können näher aneinandergerückt werden, da die Uhrziffern nicht mehr dazwischen stehen; man kann dann auch noch die Stundenzahl photographiren. Zur Ablesung hat man die Einrichtung so zu treffen, daß sich entsprechende Bilder auf der Zeit- und Scalen-Platte einstellen und ablesen lassen.

— Die mit Registrirapparaten ausgerüsteten erdmagnetischen Observatorien pflegen regelmäßig die Werthe der erdmagnetischen Elemente für die vollen Stunden eines jeden Tages zu veröffentlichen. Bei Benutzung der hier beschriebenen neuen Methode der Registrirung würde der Observator dann nur die betreffenden 24 Scalenbilder ablesen müssen. Zur Untersuchung der magnetischen

Störungen aber würde die neue Methode, wenn nach derselben an mehreren Observatorien in genau gleichen Zeiten die Scalenstände der Apparate alle 10 oder 20 Secunden photographirt würden, ein weit reichhaltigeres und zuverlässigeres Beobachtungsmaterial bieten als die bisher benutzte Methode der Aufzeichnung von Curven.

Ablesungen an 150 photographischen Bildern (auf der Platte Nr. 24)
erhalten 1894 Juli 4 von 9^h 56^m bis 10^h 30^m Abends.

Erste Zeile.				Zweite Zeile.			
No.	Min.	Sec.	Ablesung am Nonius	No.	Min.	Sec.	Ablesung am Nonius
1	56	53,0	495,45	1	4	56,0	477,2
2	57	14,7	495,40	2	5	6,0	480,45
3	57	29,0	491,95	3	5	14,0	482,15
4	57	38,0	490,45	4	5	23,0	481,05
5	57	47,8	488,5	5	5	33,0	475,3
6	58	2,0	493,8	6	5	45,0	477,95
7	58	13,7	496,15	7	5	53,0	476,7
8	58	22,9	489,45	8	6	3,0	482,2
9	58	35,0	488,4	9	6	11,0	484,3
10	58	60,0	486,4	10	6	19,0	484,95
11	59	27,0	483,9	11	6	35,0	486,7
12	59	36,0	479,05	12	6	44,0	486,1
13	59	46,0	475,65	13	6	54,0	486,45
14	59	54,7	477,05	14	7	4,0	491,3
15	60	5,0	483,65	15	7	14,0	493,9
16	60	21,0	486,65	16	7	32,0	476,5 [1])
17	60	31,0	486,25	17	7	42,0	477,45 [2])
18	60	45,0	491,2	18	8	4,0	477,15
19	60	52,6	489,95	19	8	14,0	477,5
20	1	3,0	494,25	20	8	23,0	477,5
21	1	21,2	495,60	21	8	41,9	482,4
22	1	29,5	495,35	22	8	51,0	489,05
23	1	42,0	489,05	23	8	60,8	490,95
24	1	52,0	491,90	24	9	12,0	494,65
25	2	2,0	485,1	25	9	36,0	494,35
26	2	17,0	483,5	26	9	51,0	484,1 [2])
27	2	24,0	484,1	27	10	1,0	488,25
28	2	31,8	479,85	28	10	10,0	479,3
29	2	39,0	478,0	29	10	19,0	478,45
30	2	48,0	477,15	30	10	29,0	476,65

1) Magnet hat sich stark bewegt (um 1 Scalentheil).
2) Magnet hat sich wenig bewegt (um 0,2 Scalentheil).

In Bezug auf die Angabe der Zehntel-Secunden in der obigen Zusammenstellung sei bemerkt, daß dieselben nach dem Helligkeitsverhältnisse zweier auf der photographischen Platte bei dem gleichen Bilde erschienenen Secundenzahlen geschätzt sind (vgl. S. 245).

Die zum Theil raschen Standänderungen am 4. Juli sind absichtlich durch Bewegungen eines Magneten in der Nähe des Magnetometers hervorgerufen (vergl. S. 239). Um zu ermitteln, wie rasch man die Photographien bei Bewegungen des Magneten auf einander folgen lassen kann, wurden absichtlich konstante Zeitintervalle nicht eingehalten.

Dritte Zeile.

No.	Min.	Sec.	Ablesung am Nonius
1	12	26,0	487,45
2	12	36,0	487,3
3	12	44,0	482,45
4	12	55,0	494,6
5	13	4,0	494,1
6	13	15,6	497,0
7	13	24,0	491,05
8	13	31,0	491,9
9	13	38,1	497,75
10	13	44,5	496,95
11	13	58,1	477,15 [1])
12	14	8,0	485,05
13	14	22,4	479,05
14	14	33,0	480,45
15	14	41,0	476,3
16	14	52,0	478,15
17	14	60,1	485,0
18	15	8,0	482,5
19	15	16,0	487,5 [1])
20	15	24,0	492,9
21	15	38,0	490,5
22	15	44,1	491,45
23	15	51,6	483,4 [1])
24	15	60,0	480,45
25	16	8,6	477,0
26	16	18,0	478,0
27	16	25,0	478,15
28	16	33,0	484,6 [1])
29	16	40,0	488,55
30	16	47,0	490,3

Vierte Zeile.

No.	Min.	Sec.	Ablesung am Nonius
1	18	35,1	477,25
2	18	43,2	477,55
3	18	51,0	484,8 [2])
4	18	58,0	486,45
5	19	6,0	484,9
6	19	23,0	481,0
7	19	30,3	480,9
8	19	39,0	476,6
9	19	48,0	487,1
10	20	1,8	482,65
11	20	18,0	490,0
12	20	27,0	488,25
13	20	38,3	483,2
14	20	49,0	491,95
15	20	58,7	488,0
16	21	12,7	498,7 [1])
17	21	21,8	494,95
18	21	31,0	497,25
19	21	40,1	488,70
20	21	49,4	486,3
21	22	8,0	475,9 [1])
22	22	17,0	479,3 [2])
23	22	26,0	477,3
24	22	34,0	483,95
25	22	44,0	483,05
26	22	58,0	484,35
27	23	6,0	483,65
28	23	14,1	486,35
29	23	22,0	485,6
30	23	29,0	487,2

Fünfte Zeile.

No.	Min.	Sec.	Ablesung am Nonius
1	25	8,1	487,0
2	25	20,0	484,25
3	25	29,0	482,45
4	25	37,4	483,2
5	25	46,0	483,7
6	25	58,0	478,2
7	26	5,2	480,65
8	26	13,0	477,2
9	26	21,0	483,0 [1])
10	26	29.0	486,1
11	26	45,0	488,3
12	26	55,5	490,0
13	27	6,0	491,9
14	27	13,4	491,65
15	27	23,0	487,9
16	27	35,0	485,2
17	27	42,8	486,4
18	27	50,0	483,5
19	28	57,4	483,5
20	28	7,0	478,8
21	28	26,0	479,5
22	28	33,2	479,75
23	28	42,0	477,3
24	28	51,0	484,7
25	28	60,0	482,0
26	29	14,0	487,3
27	29	22,8	485,1
28	29	32,0	493,0
29	29	41,0	494,6
30	29	51,0	497,6

1) Magnet hat sich bewegt (um 0,5 Scalentheil).
2) Magnet hat sich wenig bewegt (um 0,2 Scalentheil).

Diese 150 Bilder nehmen auf der photographischen Platte nur ein Rechteck von nahe 39mm Breite und 8mm Höhe ein.

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule
Darmstadt im Juli 1894.

Zur Frage der atypischen Epithelwucherung und der Entstehung pathologischer Drüsenbildungen.

Von

Dr. Ludwig Aschoff,
Privatdocenten u. Assistenten am pathologischen Institut zu Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn J. Orth in der Sitzung am 7. Juli 1894.

Neben den bekannten atypischen Epithelwucherungen der äußeren Haut in der Umgebung chronischer Geschwüre oder chronischer, z. B. lupöser Entzündungsheerde, wo der gutartige Charakter der Wucherung bei dem Uebergreifen auf tiefere Gewebsschichten immer zweifelhafter werden kann, haben die drüsenartigen Wucherungen in der Schleimhaut des weiblichen Genitalapparates schon längere Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt, weil auch hier die Grenze zwischen den epithelialen Gebilden und der muskulösen Wand mehr und mehr verwischt sein kann, ohne daß die Diagnose Krebs berechtigt ist. Die Thatsache, daß bei chronischen Entzündungen der Tuben und des Uterus epithelbekleidete Kanäle bis in die Muskelschicht vorwuchern und hier, wie es Chiari besonders für die Tuben gezeigt hat, zu sekundären knotigen Hyperplasien der Muskularis Veranlassung geben können, wird für gewisse Fälle nicht bestritten werden können.

Zu ähnlichen Resultaten führen die Untersuchungen, die an den mit dem Genitalapparat so nah verwandten uropoetischen System angestellt worden sind. Die früheren Arbeiten von v. Limbeck, die neueren von Pisenti, v. Brunn und Lubarsch haben uns gezeigt, daß sich auch hier an den Schleimhäuten epitheliale Neubildungen der verschiedensten Art nachweisen lassen, ohne daß von Krebsbildung die Rede sein kann.

Ehe ich auf diesen Punkt näher eingehe, möchte ich kurz betonen, daß sich neben diesen beiden Schleimhautsystemen noch eine dritte, geschlossene Epithelmembran findet, an der drüsen-

ähnliche Wucherungen beobachtet werden können, das ist das Ependym der Ventrikel. Die verschiedenen Handbücher der speziellen patholog. Anatomie, sowie die normal-anatomischen Werke über das Großhirn enthalten außer schwankenden Angaben über einfache oder mehrschichtige Anordnung des Epithels oder über die Beziehungen desselben zu den Gliazellen und den nervösen Bestandteilen keine Andeutung von drüsigen Organen. Ich lasse es nach den Untersuchungen von His und Anderen dahingestellt, mit welchem Recht man die Zelllage, welche die Ventrikel auskleidet, als besondere, isolirbare Epithelschicht bezeichnen will. Die jetzt allgemein anerkannten Ausläufer, welche diese Epithelzellen in die Gerüstsubstanz des Gehirns hineinsenden, machen wenigstens eine Sonderstellung derselben gegenüber denjenigen Schleimhäuten notwendig, wo faserförmige Verbindungen zwischen Epithel und Bindegewebe noch nicht nachgewiesen sind.

Bei dieser komplizirten Zusammensetzung muß der Befund drüsenähnlicher Gebilde um so auffallender sein. Daß Epithelwucherungen mit vollständigen Abschnürungen an dem Zentralkanal des Rückenmarks, welcher histologisch gleich gebaut ist, vorkommen können, haben Wagner[1]), Schüppel[2]), Jolyet[3]), Pick[4]) bei ihren Mitteilungen über mehrfachen Zentralkanal bereits beschrieben, und die zahlreichen Arbeiten über Syringomyelie enthalten mannigfache Angaben über epithelbekleidete Hohlräume im Rückenmark.

Unentschieden ist noch die Frage, ob diese letzteren und die oft nur scheinbaren Verdopplungen des Zentralkanals auf congenitale Störungen oder auf Neubildung oder endlich auf beides zurückzuführen sind.

Ganz ähnliche atypische Epithelstränge und Kanäle, wie sie schon Wagner für das Rückenmark abgebildet hat, konnte ich in einem Falle von Ependymitis granulosa bei einem 8 monatlichen Kinde, welches an tuberkulöser Meningitis zu Grunde ging, an den Seitenventrikeln nachweisen (Stadtsection J. N. 221, 21. XII. 93). Es bestand sehr starke Abplattung der Gehirnwindungen, bedeutende Erweiterung der Seitenventrikel, die mit wasserheller Flüssigkeit

1) J. Wagner, Notiz über einen theilweise doppelten Zentralkanal im Rückenmark des Menschen. Archiv für Anat., Physiol. 1861. S. 735.

2) Schüppel, Notiz über ein eigenthümliches Verhalten des Zentralkanals im menschlichen Rückenmark. Archiv d. Heilkunde. 1864. V. S. 569.

3) Jolyet, Sur un cas d'anomalie du canal central de la moelle epinière. 1887. Gazette médic. de Paris. S. 206.

4) A. Pick, Ueber die Entstehung eines mehrfachen Zentralkanals. Archiv f. Psych. 1878. S. 285.

prall gefüllt waren. Die zahlreichen Granula saßen beonders dicht in den vorderen Abschnitten der Seitenventrikel über den corpora striata; am stärksten waren sie im IV. Ventrikel ausgebildet. Wegen der gleichzeitig bestehenden Tuberkulose wurde ein Teil einer Ventrikelwand über einem Streifen-Körper zur Untersuchung herausgeschnitten.

Das mikroskopische Bild war folgendes. Die Grenze gegen die Ventrikelhöhle wurde durch eine meist einfache Lage von kurz zylindrischen Zellen gebildet, die mit einem mehr homogenen scharfen Saum nach der freien Fläche abschnitten. Es waren weniger die eigentlichen Zellen zu erkennen, als die dicht gelagerten mit Alaunkarmin dunkelrot gefärbten Kerne, die keine ganz gerade, sondern eine mehr zickzackförmige Linie bildeten.

Unter diesen Kernlagen folgte eine aus deutlichen, feinen, meist längsverlaufenden Fasern bestehende Schicht, die einen allmälichen Uebergang in das kernreiche subependymäre Gewebe zeigte. Besondere in die Tiefe gehende Ausläufer der Ependymzellen waren nicht zu sehen. Die regelmäßige, glatte Fläche derselben wurde nun vielfach unterbrochen durch kleine, flache Vorwölbungen, die sich aus denselben Fasern und Zellen zusammensetzten, wie die subependymäre Schicht; jedoch überwogen die Zellen den Fasergehalt. Die Ependymzellen überzogen diese Prominenzen nicht, sondern hörten mit mehr oder weniger scharfem Rande an dem Fuße der Vorwölbung auf. Oft war letztere pilzartig gestaltet, so daß die Zellen der subependymären Schicht das Epithel noch kurze Strecken weit überlagerten.

Diese Bilder stimmen mit den Beschreibungen der früheren Autoren[1]) überein, soweit dieselben betonen, daß durch die Wuche-

---

1) 1. Rokitansky, Handbuch d. spez. pathol. Anat. I. 1844. S. 748.
2. Virchow, Ueber das granulirte Aussehen der Wandungen der Gehirnventrikel. Allg. Zeitschr. f. Psychiatrie. III. 1846. S. 242.
3. Virchow, Die krankhaften Geschwülste. Bd. II. pag. 134.
4. Magnan u. Micrzejewsky, Des lésions des parois ventriculaires et des parties sousjacentes dans la paralysie générale. Archives de Physiol. 1873. S. 196.
4. C. Frommann, Untersuchungen über die normale und pathol. Histologie d. zentralen Nervensystems. Jena 1876.
5. H. Schüle, Zur Kenntnis d. zentralen Höhlenbildung im Rückenmark. Deutsch. Archiv f. klin. Med. 1877. S. 270.
6. J. Weiss, Die Wucherungen der Kammerwände des Gehirns. Wiener mediz. Jahrbücher. 1878. S. 467.
7. M. Friedmann, Ein Fall von Ependymwucherung mit subependymärer Sklerose u. s. w. Archiv f. Psychiatrie. 1885. XVI. S. 289.

rung des Bindegewebes oder Gliagewebes die Ependymzellenschicht zerrissen wird. Ob dieses thatsächlich der Fall ist, läßt sich schwer entscheiden, da oft die Grenze gegen das seitwärts noch erhaltene Epithel keineswegs eine scharfe ist, sondern die sog. Epithelzellen eine deutliche Auseinanderlagerung zeigen und sich allmälich mit den Zellen der Wucherung mischen, von denen sie sich weiterhin nicht mehr unterscheiden lassen. Man müßte also die Möglichkeit offen lassen, daß sich hier ein embryonaler Vorgang wiederholt und sich die Ependymzellen an der Neubildung von Gliagewebe mitbeteiligen (vergl. Frommann).

Noch auffallender sind aber die selbstständigen Wucherungen der Ependymzellen in die Tiefe unter Wahrung ihrer charakteristischen epithelialen Nebeneinanderordnung. Schon Magnan und Micrzejewsky haben bei Paralytikern am Ependym des IV. Ventrikels und später Weiss für die Seitenventrikel unter der Zersprengung der Epitheldecke durch die Granulationen eine Abschnürung des Epithels durch wucherndes Bindegewebe beschrieben. Sie erwähnen sogar, daß das Epithel anscheinend durch Wucherung die gesetzten Defekte auszugleichen bemüht sei.

In meinem Falle kann bei dem Mangel von Verwachsungen von einer Abschnürung epithelialer Gebilde durch die wuchernden Gliamassen keine Rede sein. Die Ependymzellenschicht bildet, abgesehen von den Granulationen, eine grade Linie, und getrennt von ihr durch die erwähnte feinfasrige Schicht, finden sich inmitten des subependymären Zelllagers deutliche epithelbekleidete Kanäle mit wechselnder Weite des Lumens. Mehrere hinter einander angelegte Schnitte zeigen, daß diese Kanäle stark gewunden sind, und daß an irgend einer Stelle eine schmale, aber deutliche Verbindung mit dem Ependymzellenlager besteht. Diese drüsenartigen Gebilde verlaufen ziemlich parallel zur Oberfläche, während der Hals mehr senkrecht zum Ependym emporsteigt. Es lassen sich nun alle möglichen Uebergänge von dem ersten Anfang der Epitheleinstülpung bis zur Ausbildung langgestreckter Kanäle nachweisen. Die Zellen gleichen in der Färbung der Kerne und in dem charakteristischen, scharfen Saume genau den Ependymzellen. Zuweilen ist das Lumen von Zellen ausgefüllt. Die streifige Faserschicht folgt diesen Zellwucherungen in mäßigem Grade nach. Oft stoßen die Zellen der subependymären Schicht direct an die Epithelzellen. Diese drüsenähnlichen Bildungen finden sich sowohl dort, wo keine Spur von Granulabildung vorhanden ist, als auch in direkter Umgebung der letzteren. So kann man grade am Rande einer Vorwölbung das Epithel zapfenförmig in die Tiefe

steigen und sich unter dem Knötchen verbreiten sehen. Auch hier handelt es sich um ein aktives Wuchern, nicht um eine Abschnürung.

Flimmerhaare konnten weder an dem Oberflächenepithel noch in den Kanälen mit Sicherheit nachgewiesen werden.

Nach den Untersuchungsergebnissen, welche für das Rückenmark in Fällen von Syringo- und Hydromyelie und für die Ventrikel bei Ependymitis chronica der Paralytiker gewonnen worden sind, glaube ich, daß man in dem vorliegenden Falle die atypischen Wucherungen des Ependymepithels trotz des jugendlichen Alters des Kindes in die extrauterine Zeit verlegen und als Ursache für dieselben eine chronische Entzündung betrachten muß. Dieselbe hat neben der Wucherung des subependymären Gewebes eine formative Thätigkeit des Epithels angeregt. Beide Gewebe betheiligen sich aktiv an den pathologischen Prozessen; das Epithel ist nicht nur der leidende Teil. So glaube ich auch nicht, daß die bindegewebige oder gliomatöse Wucherung als das primäre, und die Epithelwucherung als das sekundäre hingestellt werden kann oder umgekehrt, sondern beide Processe verlaufen neben einander her. [Das Gleiche läßt sich wohl auch für manche Veränderungen bei der Syringomyelie behaupten].

Der Versuch, in anderen Fällen von chronischer Ependymitis ähnliche Veränderungen zu finden, ist mir bisher nicht geglückt. Bei gesunden Neugeborenen, die ich zum Vergleich untersuchte, bildete das Ependymepithel eine ganz gerade Linie über dem corpus striatum, zeigte jedoch über den Hornstreifen deutliche, zierliche Faltungen. Die Kerne bildeten eine mehrfache Schicht, waren viel zahlreicher als bei dem 8monatlichen Kinde. Sodann fehlte die unter dem Epithel gelegene aus Längsfasern bestehende Schicht, sondern es folgten sofort die Zellen der subependymären Schicht, zwischen welche sich deutliche, grobe Ausläufer der Ependymzellen einsenkten (E. Henle[1]) u. Virchow[2]). Hier, wie in dem pathologischen Falle, waren reichliche Zellanhäufungen in den Lymphscheiden der Gefäße sichtbar.

Meine weiteren Untersuchungen erstrecken sich auf die Schleimhaut der harnleitenden Wege. Als Erster hat v. Limbeck bei chronischer Entzündung der Blase, die mit der Bildung von Bläschen einherlief, direkte Wucherungen des Epithels in die Tiefe beobachtet. Es handelt sich dabei um solide Epithelsprossen, die

---

1) Henle, Handbuch der Nervenlehre. 1879. S. 367.
2) Virchow, l. c. und Cellularpathologie. IV. Curs. 1871. S. 317.

an ihren jüngsten Ausläufern kolbige Anschwellungen zeigen. Durch Zerfall der zentralen Zellen kommt es zu cystischen Bildungen. In neuerer Zeit konnte v. Brunn nachweisen, daß sogar in anscheinend normalen Schleimhäuten der harnleitenden Wege epitheliale Verlagerungen vorkommen. Zwar glaubt er weniger an eine direkte Sprossung des Epithels, als an eine Abschnürung epithelialer Kugeln durch Zusammenwachsen der von ihm zuerst nachgewiesenen netzförmig angeordneten feinen Bindegewebssepten im Schleimhautepithel. Lubersch schließt sich dieser Auffassung an und führt auf die v. Brunn'schen Epithelnester die Bildung gewisser Cystenformen zurück, während er andere aus wuchernden Drüsen entstehen läßt. Diese Drüsen müssen also normalerweise in der Gegend des Trigonum, um die es sich hier in erster Linie handelt, vorhanden sein. Endlich konnte Jores den Nachweis liefern, daß der mittlere Lappen bei der sogen. Prostatahypertrophie auf eine sehr starke Wucherung eben dieser Drüsen, die sich in einem Falle bis zu den Einmündungen der Ureteren verfolgen ließen, zurückzuführen war.

Bekanntlich gehen die Meinungen über den Drüsengehalt der normalen Blasenschleimhaut noch weit auseinander. Die große Verschiedenheit der Angaben läßt vermuten, daß neben den individuellen Abweichungen noch besondere Umstände vorhanden sein müssen, um die Widersprüche erklären zu können. Obersteiner betont schon, daß in den kindlichen Blasen viel weniger Drüsen gefunden werden als beim Erwachsenen und läßt die Möglichkeit zu, daß mit zunehmenden Alter Drüsen in der Blasenschleimhaut neu entstehen.

Die Frage läßt sich noch mehr zuspitzen. Sind überhaupt normalerweise Drüsen in der Blasenschleimhaut vorhanden oder entstehen sie alle erst im späteren oder wenigstens extrauterinen Leben? Ist dieser Vorgang ein normaler oder ein pathologischer? Handelt es sich um echte Drüsen und in welcher Beziehung stehen zu der vorläufig noch hypothetischen Neubildung derselben die erwähnten Wucherungen des Schleimhautepithels?

Auf die erste Frage geben meine Untersuchungen, die ich anderweitig näher zusammengestellt habe, die Antwort, daß bei der Geburt, sowie in den ersten Lebensjahren drüsige Gebilde in der Schleimhaut des Nierenbeckens, und der Blase — soweit ein solcher Schluß aus einer größeren Zahl von Fällen zulässig erscheint — vollständig fehlen und daß der gleiche Zustand bei gesunden Erwachsenen noch zur Zeit der Pubertät vorhanden sein kann. Die Mehrzahl der zur Untersuchung kommenden Harnorgane

ist freilich nicht mehr als intakt zu betrachten und so findet man in fast allen Fällen mehr oder minder hochgradige Veränderungen.

Die zweite Frage ist also schwieriger zu entscheiden, da auch unabhängig von den akuten oder chronischen Reizzuständen die Veränderungen im Bau der Schleimhaut mit zunehmenden Alter eintreten könnten, demgemäß als physiologische Einrichtungen betrachtet werden müßten, wenn auch die negativen Befunde bei anscheinend Gesunden für den pathologischen Charakter derselben sprechen.

Die Veränderungen selbst lassen sich nach dem verschiedenen makroskopischen Aussehen in drei Hauptgruppen trennen, obwohl zwischen denselben alle möglichen Uebergänge bestehen.

Die Mehrzahl der Schleimhäute (Nierenbecken, Ureter und Blase) erscheint dem bloßen Auge vollständig unverändert und doch zeigt die mikroskopische Untersuchung weitgehende Umwandlungen, die sich mit den v. Limbeck, v. Brunn und Lubarsch beschriebenen Vorgängen decken.

Die oben erwähnte Differenz zwischen den Anschauungen v. Limbeck's und v. Brunn's über die Aktivität der Epithelwucherung oder die passive Abschnürung läßt sich auf Grund häufiger Untersuchungen dahin lösen, daß beide Prozesse neben einander verlaufen. Ich möchte dieselben mit dem Namen der hohen und tiefen Abschnürung bezeichnen. Bei der ersten Form handelt es sich, wie v. Brunn betont, um eine starke Verlängerung der feinen Bingewebssepten, welche in das Epithel ausstrahlen; dieselben wachsen sich, wie ich auf Grund der gleichen Befunde am Nierenbecken glaube, auch unabhängig von stärkeren Kontraktionszuständen der Schleimhaut, mehr und mehr entgegen und bilden schließlich halbkugel- oder beutelförmige Erhebungen über die übrige Epithelschicht. Der Beutel liegt mit seiner Basis der letzteren auf, ist nicht in das Bindegewebe eingebettet. Findet endlich die vollständige Zuschnürung desselben statt, so liegt die mit Epithelzellen ausgefüllte Kugel fast frei auf der Oberfläche der Schleimhaut, nur bedeckt von den auf sie hinaufreichenden Epithelien. Der Schnürring liegt weit oberhalb der übrigen Epithelschicht. Ein ganz anderes Bild zeigt die zweite Form. Hier ist die Schleimhautoberfläche vollständig glatt, von feinen Bindegewebssepten konnte ich nichts entdecken. Das Epithel bildet eine ganz gerade Linie. Hier und da wird dieselbe plötzlich unterbrochen, indem das Epithel als beutelförmige oder solide Einstülpung tiefe Fortsätze in dasselbe treibt. Das Verbindungsstück der epithelialen Neubildung mit der Epitheloberfläche, der Hals des Beutels kann

enger und enger werden, endlich findet auch hier eine Abschnürung statt. Die Oberfläche ist dabei ganz glatt geblieben. Der Schnürring liegt unterhalb der Epithelschicht.

Im ersteren Falle ist das wuchernde Bindegewebe, im zweiten das wuchernde Epithel der wesentlich die Neubildung bedingende Faktor. Zwischen beiden Formen giebt es alle möglichen Uebergänge, d. h. Epithel und Bindegewebe beteiligen sich abwechselnd stark an den pathologischen Prozessen. Sowohl die hochgelegenen Epithelkugeln wie die tiefen Epithelstränge sind gewöhnlich solid, ohne nachweisbaren drüsigen Charakter, wenn auch sekundäre Ausbuchtungen und Sprossenbildungen vorkommen.

Eine andere Gruppe von Schleimhäuten zeigt schon makroskopische Veränderungen. Es sind das die bereits häufiger in der Umgebung des Blasenhalses beschriebenen kleinen weißen stecknadelspitzen- bis stecknadelkopfgroßen Erhabenheiten, die von vielen Autoren als Papillen oder Lymphknoten aufgefaßt worden sind. Die Richtigkeit der letzteren Anschauung wurde auch mikroskopisch für manche Fälle bestätigt. Eine dritte Erklärung gaben u. A. Haller, Virchow, Lubarsch, indem sie Beziehungen zu drüsigen Organen annahmen. Diese letztere Auffassung scheint mir für die Mehrzahl der Fälle die richtige zu sein. Untersucht man die Blasenschleimhaut bei den Sektionen, ehe man durch allzu energische Entleerung des Harns die Oberfläche mehr oder weniger lädirt hat, genauer, so kann man sehr häufig diese kleinen Gebilde wahrnehmen, so daß es den Anschein gewinnt, als wenn ihr Vorkommen, besonders an der vorderen Blasenwand, dicht oberhalb des orif. int. ein regelmäßiges sei. In anderen Fällen freilich findet man nur hier und da am Blasengrund oder auch an der hinteren Blasenwand spärliche Knötchen zerstreut. Bei schweren entzündlichen Prozessen kommt es umgekehrt zu einer diffusen Entwicklung, so daß, wie in einem Falle von Tuberkulose, die ganze Blasenschleimhaut bis weit über die Ureteren hinauf mit Hunderten kleinster Tuberkelchen besetzt ist. Diese submiliaren Knötchen sind aber, wie die mikroskopische Untersuchung lehrt, nichts Anderes als Gruppen der oben erwähnten hohen und tiefen Abschnürungen, die zum Teil kleinen Bindegewebspapillen auf- oder eingelagert sein können. An den tiefen Epithelsprossen sind unterdes Umwandlungen vor sich gegangen, indem ein regelmäßiges Lumen, von einfacher oder doppelter Schicht Zylinderepithelien begrenzt, überall sichtbar wird. Im ganzen Bau gleichen diese Gebilde den Drüsen der Urethra und sie liefern auch, wie schon die ursprünglichen soliden Einstülpungen und Abschnürungen die-

selben homogenen Massen, wie die Prostatadrüsen. Ich glaube daher, daß es sich hier, wo alle möglichen Uebergänge zwischen den Wucherungsanfängen und den ausgebildeten drüsigen Formen zu verfolgen sind, um die Bildung echter Drüsen handelt, die auch funktionell den Urethaldrüsen gleichzustellen sind. In dem oben erwähnten Falle ließen sich die ausgebildeten Drüsen auch an der hinteren Blasenwand, weit oberhalb der Ureteren nachweisen.

Dehnt man die Untersuchung auch auf den Ureter und das Nierenbecken aus, so ist man erstaunt, wie häufig man auch hier den erwähnten Knötchen, die mikroskopisch ganz gleich gebaut sind, begegnet. Freilich sind sie meist nur in spärlicher Anzahl vorhanden und von so geringer Größe, daß es der spiegelnden Beleuchtung bedarf, um sie zu erkennen. Sie finden sich meist am Eingang zum Ureter und in den Nierenkelchen.

Noch anders gestaltet sich das Bild in folgenden Fällen. Die Veränderungen der Schleimhaut haben schon für das bloße Auge ein charakteristisches Aussehen gewonnen. Es handelt sich um die Bildung mehr oder minder zahlreicher Cysten, die in ihrer Größe, Gestalt, Farbe und Aussehen die weitesten Differenzen aufweisen können, wie aus den Schilderungen früherer Autoren zu entnehmen ist. Charakteristisch für diese Bläschen ist ihr Sitz. Sie finden sich am zahlreichsten oberhalb der verengten Stellen der Harnwege, am orif. inf. urethrae, an dem Uebergang des Nierenbeckens zum Ureter und in den Nierenkelchen. Gerade hier sind auch die erwähnten Knötchen am zahlreichsten entwickelt.

Wenn Lubarsch in seinen Fällen, die überdies nur Frauen betrafen, einen Teil der Cysten auf die v. Brunn'schen Epithelnester zurückführt, für den anderen Teil proliferirende Drüsen der Blasenschleimhaut zur Erklärung heranzieht, so glaube ich weiter gehen zu müssen, da eine derartige Trennung nicht aufrecht erhalten werden kann.

Die mikroskopische Untersuchung zeigt, daß die Cysten im engsten Zusammenhange mit den epithelialen Neubildungen stehen und daß auf die verschiedenen Entwicklungsstadien der letzteren, von der einfachen Einstülpung an bis zur ausgebildeten vielbuchtigen oder vielästigen Drüse, die wechselvollen Formen der Ersteren zurückzuführen sind. Denn alle die beschriebenen Epithelnester und -stränge haben die Tendenz sich gegen die Oberfläche abzuschnüren und damit ist die Grundlage zur Cystenbildung gegeben. Das Mikroskop zeigt, daß die ersten Anfänge dazu sich viel weiter zurückverfolgen lassen, bis in die ersten Stadien der Epithelabschnürung, wo makroskopisch noch gar keine Verände-

rungen sichtbar sind. Denn in den kleinen der Oberfläche aufliegenden Epithelkugeln kommt es schon zur Bildung homogener Inhaltsmassen und schleimiger Umwandlung der central gelegenen Zellen, so daß die Existenz mikroskopischer Cysten damit bewiesen ist. Auch in den Fällen der zweiten Reihe fehlen sie nicht, da die aufmerksame Durchmusterung der Knötchen hier und da kleinste Bläschen, also Umwandlung in Cysten erkennen läßt.

Das Resultat darf dahin zusammengefaßt werden, daß die Cystenbildung in der Schleimhaut der harnleitenden Wege ein weit häufigerer Vorgang ist, als man bisher angenommen hat, daß eine Unterscheidung verschiedener Formen nach der Entstehungsweise aus v. Brunn'schen Epithelnestern und normalen Schleimhautdrüsen nicht zulässig ist, sondern daß alle Cysten auf eine, anscheinend nur in pathologischen Fällen, aber hier sehr leicht eintretende Abschnürung und Wucherung des Schleimhautepithels bis zur Bildung vollständig drüsiger Gebilde zurückgeführt werden müssen.

Diese Cystenbildungen sind nun nicht nur auf die oberen Harnwege beschränkt, sondern finden sich vereinzelt auch in der Schleimhaut der Harnröhren beiderlei Geschlechts. Hier sind ja Drüsen normalerweise vorhanden und so wäre die Erklärung sehr einfach, wenn nicht die Möglichkeit bestände, daß neben den normalen noch pathologisch neu gebildete Drüsen bei der Cystenbildung mitwirkten. Diese Frage hat sich nicht positiv entscheiden lassen. Auffallend ist, daß die Cystenbildung meist auf die oberen Abschnitte der Harnröhre beschränkt ist. Es schien daher wünschenswerth, bei Neugeborenen die Urethra beider Geschlechter auf den normalen Drüsengehalt hin zu untersuchen. Es ergab sich als Resultat, wie ich es an anderen Orten ausführlicher begründe, daß die weibliche Urethra mit der pars prostatica des Mannes völlig übereinstimmend aufgebaut ist.

In beiden kann man zwei Abschnitte unterscheiden, einen oberen, in welchem nur kleine subepithelial und submukös gelegene, symmetrisch angeordnete und an Größe vom orif. inf. an stetig zunehmende Drüschen vorhanden sind, und einen unteren, in welchen die Prostatadrüsen einmünden. Demselben entspricht beim Weibe ungefähr das untere Drittel der Harnröhre. Hier öffnen sich die von Skene und Koks neu entdeckten, von Schüller Urethralgänge genannten zwei Hauptkanäle, daneben eine größere Zahl kleinerer, von Obersteiner beschriebener, die in ihrer Gesammtheit von de Graaf und Anderen als weibliche Prostata bezeichnet worden sind. Ihre mit Drüsenbläschen besetzten Enden sind,

gleich wie die männlichen Prostatadrüsen, in glatte, ja teilweise in quergestreifte Muskulatur eingebettet. Charakterisirt ist der prostatische Antheil der weiblichen Urethra noch dadurch, daß wie beim Manne die quergestreifte Muskulatur des Sphincter in diesem Abschnitt die letzten Endigungen des Genitalstranges, hier also die Scheide, als constructor cunni mit umfaßt. Da beim Manne die prostatischen Drüsen bis zum Blasenhals hinaufreichen, so kommt es im extra-uterinen Leben überhaupt zu keinem Schluß des Sphincter exterum, wohl aber beim Weibe, bei welchem die Prostata auf das untere Drittel beschränkt bleibt, in den beiden oberen hingegen ein quergestreifter Schließer vollkommen ausgebildet ist.

Im intrauterinen Leben ist der sinus urogenitalis bis zum 7. Monat hin noch völlig frei von Drüsen. Erst gegen Ende der intrauterinen Entwicklung scheint eine Verlagerung eines Teils der Prostatadrüsen, welche die Einmündung der Urethra in den sinus begrenzen, auf den letzteren derart stattzufinden, daß beim Manne die obere Wand der pars membranacea mit prostatischen Drüsen umgeben ist (sog. Littré'sche Drüse), während beim Weibe ein Teil in das Vestibulum zwischen Urethra und Vagina einmündet (sog. lacunae superiores vestibuli Halleri). Diese beiden Drüsengruppen sind ausgezeichnet durch eine partielle Umwandlung ihrer Endbläschen in echte Schleimdrüschen.

Während die kleinen Schamlippen und die Clitoris zur Zeit der Geburt frei von Drüsen sind, ist die entsprechende pars cavernosa penis mit echten Schleimdrüschen reichlich ausgestattet. Den Namen Littré's auf diese Drüsen anzuwenden ist unstatthaft.

Die an der Schleimhaut der Harnröhre beider Geschlechter eintretenden pathologischen Veränderungen sind ganz ähnlich wie diejenigen an den oberen Harnwegen. Auch hier kommt es zu Wucherungen der feinen Bindegewebszotten mit sekundären Epithelabschnürungen. Direkte Epithelwucherung ist bei der großen Zahl der normalerweise vorhandenen Drüsen verschiedenster Größe und Gestalt nicht ohne weiteres zu beweisen. Die in den oberen Abschnitten der Harnröhre beobachteten Cysten lassen sich auf die physiologischen oberflächlichen Drüsen dieses Teiles zurückführen.

Der Fundamentalbereich der Schwarz'schen s-Function im Falle complexer Exponenten.

Von

Fr. Schilling.

Vorgelegt von F. Klein am 31. Juli 1894.

Im folgenden möchte ich mir erlauben, von dem Inhalte eines Vortrages einen kurzen Bericht zu geben, den ich in der Sitzung der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen am 24. Juli zu halten die Ehre hatte.

Es handelt sich um die Fortsetzung meiner in den Annalen Bd. 44 (1894) erschienenen Arbeit: „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function“, die ich fernerhin kurz als „Beiträge“ citieren will, und zwar um die dort noch unerledigt gebliebene Aufgabe, den Fundamentalbereich der genannten Function im Falle beliebiger complexer Exponenten geometrisch zu konstruieren. Es sei gleich vorweg bemerkt, daß wir denselben in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks zeichnen wollen. Die allgemeinen Gedanken, die hier in Betracht kommen, finden sich insbesondere im § 2, sowie § 21 u. 22 der genannten Arbeit angegeben.

I. Im ersten Teile meines Vortrages wurden zunächst zwei Hülfssätze aufgestellt. Die Ableitung des ersten Hülfssatzes knüpft an die identische Doppelverhältnisrelation an:

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \frac{DV(a_1 a_2 c_1 b_1)}{DV(a_1 a_2 c_2' b_1)} \cdot \frac{1-DV(a_1 a_2 c_2' b_1)}{1-DV(a_1 a_2 c_1 b_1)}.$$

Die Bedeutung der Punkte a_1, b_1, c_1 u. s. w. ist, wie auch die aller später gebrauchten Bezeichnungen, dieselbe wie in den „Beiträgen“; die 4 Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' insbesondere werden die 4 Eckpunkte unseres gesuchten Kreisbogenvierecks bilden. Da nun $DV(a_1 a_2 c_2' b_1) = \frac{1}{DV(a_1 a_2 c_2 b_2)}$ ist, so kann man direkt für die auf der rechten

Seite vorkommenden Doppelverhältnisse die in den „Beiträgen“ § 10 gegebenen Ausdrücke einsetzen, welche nur die Exponenten λ, μ, ν enthalten. Dann ergiebt sich nach einer leichten Vereinfachung die elegante Formel:

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda+1)}.$$

Wenn wir noch $DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \varrho \cdot e^{i\varphi\pi}$ setzen, wo $-1 \leqq \varphi \leqq +1$ sein mag, so zerfällt die letzte Gleichung in die beiden folgenden:

$$e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')} = \varrho,$$
$$\nu'-\mu'-\lambda' = \varphi-1 \pm 2n.$$

Für die letzte Relation, die für uns besonders wichtig ist, wurde eine einfache geometrische Veranschaulichung hinzugefügt. In Worten besagt diese Formel:

Der reelle Teil ν' des den zusammengehörigen Ecken c_1, c_2' entsprechenden Exponenten, vermindert um die reellen Teile der beiden anderen Exponenten, ist bei gegebenem Doppelverhältnis $(a_1 b_1 c_1 c_2')$ notwendig gleich einer bestimmten Konstanten, abgesehen von einer positiven oder negativen geraden Zahl.

Der zweite in Aussicht genommene Hülfssatz ist bereits in den „Beiträgen“ § 21 angegeben worden:

Jedes als Fundamentalbereich seiner geometrischen Gestalt nach überhaupt brauchbare Kreisbogenviereck stellt uns eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Fundamentalbereiche vor, die durch die verschieden mögliche Zuordnung jedes Seitenpaares sich unterscheiden.

Bei dieser verschiedenen Zuordnung ändern sich nur die imaginären Teile der zugehörigen Exponenten λ, μ, ν, und zwar läßt sich stets erreichen, daß dieselben jede beliebige Wertecombination annehmen, welche der Relation $e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')} = \varrho$ genügt, also überhaupt jede Wertecombination, welche bei dem vorliegenden Doppelverhältnis $(a_1 b_1 c_1 c_2')$ vorkommen kann. Dieser letzte Hülfssatz ergibt sogleich das wichtige Schlußresultat: Gilt es den Fundamentalbereich für ein gegebenes Wertetripel λ, μ, ν zu konstruieren, so genügt es, ein brauchbares Kreisbogenviereck zu zeichnen, welches das den Exponenten λ, μ, ν entsprechende Doppelverhältnis der

vier Eckpunkte und überdies den reellen Teilen der Größen λ, μ, ν entsprechende Winkel darbietet, d. h. der Winkel der Ecke a_1 muß gleich $2\lambda'\pi$, der der Ecke b_1 gleich $2\mu'\pi$ und die Summe der Winkel der Ecken c_1 und c_2' gleich $2\nu'\pi$ sein.

II. Der folgende Teil meines Vortrages bis zum Schluß war dann dem Nachweis gewidmet, wie sich in dem hiermit festgelegten Sinne für ein gegebenes Wertetripel λ, μ, ν der zugehörige Fundamentalbereich in Gestalt eines Kreisbogenvierecks wirklich konstruieren läßt. Wir wollen jedoch den Fall, daß eine oder mehrere der Größen λ, μ, ν rein imaginär sind, oder daß dieselben einer Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n+1$ genügen, vor der Hand von unserer Betrachtung ausschließen. Das erste Vorkommnis würde noch eine besondere Behandlung erfordern, das zweite ist in den „Beiträgen“ § 24 ff. ohnehin erledigt. Insbesondere ist damit ein Zusammenfallen der Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' ausgeschlossen.

Wir können nun zunächst gemäß § 12 der „Beiträge“ den zu den gegebenen Werten λ, μ, ν gehörigen Kern und damit, indem wir die Ecke c_1 verdoppelt annehmen, die 4 Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' ihrer Lage nach konstruieren. Die drei Punkte a_1, b_1, c_1 denken wir jetzt durch lineare Transformation entspr. in die Punkte $-1, 0, +1$ verlegt. Dann ergeben sich zunächst die folgenden beiden Sätze:

Liegt der vierte Eckpunkt c_2' oberhalb der Axe des Reellen, dann gilt $-1 \leqq \varphi \leqq 0$, und die Größe $\psi = \nu' - \mu' - \lambda'$, die wir uns auf einer reellen Zahlenreihe aufgetragen denken können, ist auf die Intervalle beschränkt von $2n$ bis $2n+1$, woselbst n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Liegt aber c_2' unterhalb der Axe des Reellen, dann gilt $0 \leqq \varphi \leqq +1$, und der Ausdruck ψ liegt in einem der übrig bleibenden Intervalle von $2n-1$ bis $2n$.

Der Uebergangsfall, der den Grenzen dieser Intervalle entspricht, tritt dann ein, wenn auch c_2' auf der Axe des Reellen liegt.

Nun werden wir auch im allgemeinen Falle, wie in der Dreieckstheorie, zwischen Vierecken erster Art und solchen zweiter Art unterscheiden. Wir sprechen von einem Viereck erster Art, wenn der reelle Teil jedes Exponenten kleiner oder gleich der Summe der reellen Teile der beiden anderen Exponenten ist, und von einem Viereck zweiter Art, wenn der reelle Teil des einen Exponenten größer ist als die Summe der reellen Teile der beiden übrigen Exponenten.

III. Wir beschränken uns zunächst auf die Konstruktion der reducierten Bereiche, deren Definition in § 22 der „Beiträge“ allgemein gegeben ist. Es sei ferner vorausgesetzt, daß für den reducierten Bereich $\nu' \geqq \mu' \geqq \lambda'$ sei, was keine Beschränkung bedeutet, d. h. es soll allemal diejenige Ecke verdoppelt werden, welche dem in seinem reellen Teile größten Exponenten entspricht. Die Größe ψ kann dann (insofern es sich um einen reducierten Bereich handelt) nur in den drei Intervallen von -1 bis 0, von 0 bis $+1$ und von $+1$ bis $+2$ gelegen sein, die dann einzeln nach einander zu behandeln sind.

Es sei zunächst $0 < \psi < +1$. Dann liegt ein Viereck zweiter Art vor, und der Punkt c_2' ist oberhalb der Axe des Reellen gelegen. Wir nehmen eine beliebige Lage des Punktes c_2' an und verbinden denselben mit den Punkten a_1 und b_1 durch gerade Linien. Dann entsteht ein geradliniges Viereck mit den Ecken a_1, b_1, c_1, c_2', dessen Winkel, wie leicht zu erkennen ist, die obige Bedingung für ψ erfüllen. Doch stellt dasselbe noch nicht den gesuchten Bereich dar, da ja die Winkel den reellen Teilen λ', μ', ν' der Exponenten noch nicht entsprechen. Wir stellen uns daher die Aufgabe, durch Hinein- oder Hinausdrehen der einzelnen Seiten unter Festhaltung der Ecken das Viereck so zu verändern, daß es die richtigen Winkel bekommt. Dieser geometrische Proceß entspricht genau dem im § 14 der „Beiträge“ angewendeten der Dreieckstheorie. Um das Gesagte allgemein auszuführen, setzen wir:

$$\nu' = \psi + \mu' + \lambda',$$
$$\mu' = 0 + \mu',$$
$$\lambda' = 0 + \lambda'$$

und zeigen zunächst, daß es allemal ein brauchbares Hülfsviereck gibt mit denselben Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' und solchen Winkeln, wie sie Exponenten mit den reellen Teilen $\nu_0' = \psi$, $\mu_0' = 0$, $\lambda_0' = 0$ entsprechen. Dieses Hülfsviereck erhält man, indem man die Kreisbogenseiten des ursprünglichen geradlinigen Vierecks in bestimmter Weise nach innen (und event. auch nach außen) dreht, bis die Winkel der Ecken a_1 und b_1 zu null geworden sind. Es zeigt sich (was ja bei dieser Art geometrischer Betrachtungen immer besonders ausgeführt werden muß), daß die anzuwendenden geometrischen Processe auch allgemein möglich sind, d. h. sich bei jeder beliebigen Lage des Punktes c_2' oberhalb der Axe des Reellen ausführen lassen, ohne daß das entstehende Hülfsviereck unbrauchbar würde. Von diesem Hülfsviereck steigen wir dann zum verlangten

Viereck für die gegebenen Exponenten λ, μ, ν auf, indem wir die Kreisbogenseiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2\lambda'\pi$, die Kreisbogenseiten $b_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2\mu'\pi$ nach außen drehen.

In ganz analoger Weise erledigen sich die Fälle, daß ψ in einem der beiden anderen Intervalle liegt. Der Punkt c_2' ist für sie unterhalb der Axe des Reellen gelegen.

Ist erstlich $-1 < \psi < 0$, so haben wir ein Viereck erster Art. Wir verbinden wieder den in beliebiger Lage angenommenen Punkt c_2' mit a_1 und b_1; dann gibt das Aeußere des geradlinig begrenzten Vierecks ein Kreisbogenviereck, dessen Winkel dem richtigen Intervall der Größe ψ entsprechen. Wir setzen jetzt:

$$\nu' = 0 + \alpha + \beta,$$
$$\mu' = \mu_0' + \beta,$$
$$\lambda' = \lambda_0' + \alpha,$$

woselbst $\mu_0' + \lambda_0' = -\psi$ und $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ ist, und zeigen, daß es wieder ein brauchbares Hülfsviereck gibt mit denselben Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' und solchen Winkeln, die Exponenten mit den reellen Teilen $\nu_0' = 0$, μ_0', λ_0' entsprechen. Man erhält dieses Hülfsviereck, indem man die Kreisbogen des Ausgangsvierecks so nach innen dreht, daß jetzt die Winkel der Ecken c_1 und c_2' zu 0 werden. Die anzuwendenden geometrischen Processe erweisen sich wieder für jede beliebige Lage des Punktes c_2' als ausführbar. Von diesem Hülfsviereck steigt man genau wie vorhin zu dem gewöhnlichen Viereck auf.

Was ferner den Fall $+1 < \psi < +2$ anbetrifft, so gehört demselben wieder ein Viereck zweiter Art zu. Wir gehen daher genau wie im ersten Falle vor. Wir wählen als Ausgangsviereck dasjenige, welches durch polare Anhängung einer Vollebene längs eines Verzweigungsschnittes von c_1 nach c_2' aus dem Hülfsviereck des vorigen Falles entsteht. Denn da vermöge dieser Operation die Winkelsumme an den Ecken c_1 und c_2' um 4π vermehrt ist, so gehört der Ausdruck ψ für dieses neue Viereck dem richtigen Intervall an. Es läßt sich dann stets wieder durch Hineindrehen der Kreisbogenseiten ein brauchbares Hülfsviereck konstruieren, welches an den Ecken a_1 und b_1 verschwindende Winkel besitzt. Von ihm aus steigt man endlich wie im ersten Falle zum gewünschten Bereich für die gegebenen Exponenten λ, μ, ν auf.

Auch der Uebergangsfall, daß ψ einer der Grenzen des genannten Intervalls angehört, erledigt sich leicht. Wie wir wissen,

muß c_2' dann auf der Axe des Reellen liegen, und so sind die zwei Fälle einander gegenüberzustellen, daß c_2' entweder innerhalb oder außerhalb der Strecke $a_1 b_1$ gelegen ist. Die zu zeichnenden Figuren bieten in allen Fällen nicht die geringste Schwierigkeit. Hiermit ist dann die Konstruktion aller reducierten Bereiche erledigt.

IV. Jetzt tritt die weitere Frage an uns heran, wie wir von diesen reducierten Bereichen zu den allgemeinen Bereichen aufsteigen. Wir werden in ganz entsprechender Weise vorgehen, wie im § 25 der „Beiträge" im Falle der dort vorausgesetzten Bedingung $\pm\lambda\pm\mu\pm\nu = 2n+1$. Die sich auf einem reducierten Viereck mit den Exponenten λ_0, μ_0, ν_0 aufbauenden Bereiche mögen fortan durch die Exponenten $\lambda = \lambda_0 + P$, $\mu = \mu_0 + Q$, $\nu = \nu_0 + R$ gekennzeichnet werden, woselbst P, Q, R ganze positive Zahlen von gerader Summe $2S$ bedeuten.

Wir setzen:

$$P = B + C,$$
$$Q = C + A,$$
$$R = A + B.$$

Dann ist:

$$A = \frac{Q+R-P}{2} = S-P,$$

$$B = \frac{R+P-Q}{2} = S-Q,$$

$$C = \frac{P+Q-R}{2} = S-R,$$

d. h. A, B, C sind selbst wieder ganze Zahlen.

Jetzt werden wir die Fälle unterscheiden, daß jede der Größen P, Q, R kleiner oder gleich ist der Summe der beiden anderen, oder daß die größte unter ihnen größer ist als die Summe der beiden anderen.

Im ersten Falle sind die Größen A, B, C positiv oder gleich 0; wir werden daher von dem vorliegenden reducierten Bereich λ_0, μ_0, ν_0 ausgehend zu dem allgemeinen Bereich $\lambda_0 + P$, $\mu_0 + Q$, $\nu_0 + R$ aufsteigen, indem wir einmal die sich entsprechenden Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2B\pi$, die Seiten $b_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2A\pi$ nach außen drehen, und dann noch längs eines Verzweigungsschnittes, der die beiden Ecken a_1 und b_1 verbindet, insgesamt C Vollebenen anhängen. Ein Blick

auf die Figuren der reducierten Bereiche zeigt, daß diesem geometrischen Processe niemals eine Schwierigkeit entgegensteht, daß insbesondere der Verzweigungsschnitt sich den im § 22 der „Beiträge“ aufgestellten Bedingungen gemäß ziehen läßt.

Im zweiten Falle sei $R > Q > P$ angenommen, dafür aber die Bedingung, daß für den reducierten Bereich $\nu_0' \geqq \mu_0' \geqq \lambda_0'$ sei, aufgehoben. Dann ist jedenfalls wieder $\nu' \geqq \mu' \geqq \lambda'$, da die Größe R wenigstens um 2 größer ist als die Summe der beiden anderen Größen Q, P. Der Ausdruck $\psi = \nu' - \mu' - \lambda'$ kann dann, wie leicht zu übersehen ist, nur in den Intervallen von -1 nach der positiven Seite hin gelegen sein. Welchem Intervall ψ aber auch angehören mag, man kann immer für dasselbe das charakteristische Hülfsviereck konstruieren, in welchem zwei Winkel, entweder, wie für das Intervall von -1 bis 0, die Winkel an den Ecken c_1 und c_2' oder wie für die übrigen in Frage kommenden Intervalle die Winkel an den Ecken a_1 und b_1 zu null geworden sind. Wir haben dieses Hülfsviereck bereits konstruiert, falls die Größe ψ den ersten drei von -1 nach der positiven Seite gelegenen Intervallen angehört. Die Hülfsvierecke für den Fall, daß ψ in irgend einem anderen positiven Intervall liegt, ergeben sich sehr einfach, indem wir das dem Intervall von 0 bis $+1$ resp. $+1$ bis $+2$ zugehörige Hülfsviereck mit den richtigen Eckpunkten a_1, b_1, c_1, c_2' zeichnen und in ihm längs eines Verzweigungsschnittes von c_1 nach c_2' eine bestimmte Anzahl von Vollebenen anhängen. Wieder zeigen unsere Figuren, daß sich dieser Verzweigungsschnitt stets in zulässiger Weise ziehen läßt. Von dem Hülfsviereck aus können wir dann durch Hinausdrehen der einzelnen Kreisbogenseiten, genau wie bei der Konstruktion der reducierten Bereiche, stets zu dem Fundamentalbereich für die gegebenen Exponenten λ, μ, ν selbst aufsteigen. Hiermit ist gezeigt, daß wir auch im allgemeinen Falle eines nicht reducierten Wertetripels λ, μ, ν den zugehörigen Fundamentalbereich stets in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks wirklich konstruieren können.

Der Schluß des Vortrages entwickelte noch, wie die vorstehend mitgeteilten Methoden sich in einfacher Weise auch auf den Fall, daß einer oder mehrere der Exponenten rein imaginär sind, ausdehnen läßt.

Das allgemein erreichte Resultat fassen wir nochmals in den Satz zusammen:

Für jedes beliebige Wertetripel λ, μ, ν, mag der einzelne Exponent reell, rein imaginär oder complex sein, läßt sich allemal der Fundamentalbereich der zugehörigen Schwarz'schen s-Function in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks konstruieren.

Göttingen, Ende Juli 1894.

Ueber das Analogon der Function $\wp u$ im allgemeinen hyperelliptischen Fall.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Vorgelegt von F. Klein am 31. Juli 1894.

§ 1. Bezeichnungen.

Das der Betrachtung zu Grunde liegende hyperelliptische Gebilde sei

$$y^2 = R(x) \equiv A\prod_{\lambda=0}^{2\varrho+1}(x-a_\lambda). \tag{1}$$

Ferner sei

$$\int\frac{g_\alpha(x)\,dx}{y}, \qquad \int\frac{g_{\varrho+\alpha}(x)\,dx}{y} \tag{2}$$
$$\alpha = 1, 2, \dots \varrho$$

irgend ein Weierstraßsches System von Integralen erster und zweiter Gattung, d. h. die ganzen Functionen von $g_\alpha(x)$ vom Grad $\varrho-1$ und $g_{\varrho+\alpha}(x)$ vom Grad 2ϱ genügen für beliebige zwei Stellen (x, y) und (ξ, η) des Gebildes der Relation:

$$\frac{d}{d\xi}\,\frac{1}{2}\,\frac{y+\eta}{(x-\xi)\,y} - \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\,\frac{\eta+y}{(\xi-x)\,\eta}$$
$$= \sum_\alpha\left(\frac{g_\alpha(x)}{y}\,\frac{g_{\varrho+\alpha}(\xi)}{\eta} - \frac{g_\alpha(\xi)}{\eta}\,\frac{g_{\varrho+\alpha}(x)}{y}\right), \tag{3}$$

wobei der Index α (wie stets im folgenden die ersten Buchstaben des griechischen Alphabets) die Werte $1, 2, \dots \varrho$ annimmt.

Es ist dann nach Herrn Weierstraß[1])

1) Vorlesungen über hyperelliptische Functionen vom Winter 1881/82; die Function $F(x, \xi)$ ist dort mit $\mathfrak{R}(x, \xi)$ bezeichnet.

(4) $$\frac{d}{d\xi}\,\tfrac{1}{2}\,\frac{y+\eta}{(x-\xi)y} - \sum_{\alpha}\frac{g_{\varrho+\alpha}(\xi)}{\eta}\,\frac{g_\alpha(x)}{y} = \frac{y\eta+F(x,\xi)}{2(x-\xi)^2 y\eta},$$

darin ist $F(x,\xi)$ eine ganze symmetrische Function von x und ξ, vom Grad $\varrho+1$ in jeder der beiden Variabeln, und überdies ist

(5) $$F(\xi,\xi) = R(\xi),$$

(6) $$\left(\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}\right)_{x=\xi} = \tfrac{1}{2}R'(\xi).$$

Ferner sei $\Theta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u_1\ldots u_\varrho) = \Theta_{\varphi\psi}(u_1\ldots u_\varrho)$ die mit den Perioden des Integralsystems (2) als Moduln gebildete Weierstraßsche Θ-Function mit der transcendenten Characteristik $\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}$ und der algebraischen Characteristik $\varphi\psi$. Dabei möge das Querschnittsystem so gewählt sein, daß dem „Fundamental"-Θ die algebraische Characteristik

$$\varphi = A'(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\varrho+1}),$$
$$\psi = A''(x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\varrho})$$

zukommt.

Nach willkürlicher Annahme der ϱ Functionen $g_\alpha(x)$ kann man die ϱ Functionen $g_{\varrho+\alpha}(x)$ nach Herrn Klein immer noch so wählen, daß die Function $F(x,\xi)$ mit der — nicht homogen geschriebenen — $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Polare von $R(x)$ in Beziehung auf ξ identisch wird; die zugehörigen Θ-Functionen sind dann nur um constante Factoren von den Kleinschen σ-Functionen verschieden. Die folgenden Entwicklungen sind zwar von einer derartigen Specialisierung des Integralsystems (2) unabhängig; allein die gegebenen Sätze sind nur unter Voraussetzung dieses speciellen Integralsystems die genauen Verallgemeinerungen der entsprechenden Sätze über die Function $\wp u$.

§ 2. Verallgemeinerung des Satzes:

$$\wp\left(\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)}\frac{dx}{y}\right) = \frac{y\eta+F(x,\xi)}{2(x-\xi)^2}.$$

Es werde nunmehr definiert:

(7) $$\wp\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u_1,u_2\ldots u_\varrho;s,t) = -\sum_\alpha\sum_\beta\frac{\partial^2\log\Theta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u_1,u_2\ldots u_\varrho)}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}\,g_\alpha(s)g_\beta(t),$$

wobei s, t zwei neue, sowohl von $u_1, u_2 \ldots u_\varrho$ als auch von einander unabhängige Variable bedeuten.

Die dem fundamentalen Θ entsprechende $\wp$-Function werde mit $\wp(u_1 \ldots u_\varrho; s, t)$ ohne Index bezeichnet; auf sie lassen sich die übrigen $\wp$-Functionen unmittelbar zurückführen, weshalb wir uns auf die Betrachtung dieser einen Function beschränken können.

Es gilt nunmehr der folgende

Satz I: Setzt man in der Function $\wp(u_1, u_2 \ldots u_\varrho; s, t)$ für die Variabele $u_1, u_2 \ldots u_\varrho$ die $(\varrho+1)$-gliedrigen Integralsummen:

$$(8) \quad w_\alpha = \int_{a_1}^{(x,y)} \frac{g_\alpha(x)\,dx}{y} + \int_{a_3}^{(x_2,y_2)} \frac{g_\alpha(x)\,dx}{y} + \cdots + \int_{a_{2\varrho+1}}^{(x_{\varrho+1}, y_{\varrho+1})} \frac{g_\alpha(x)\,dx}{y},$$

so ist:

$$(A) \quad \begin{aligned} &\wp(w_1, w_2 \ldots w_\varrho; s, t) \\ &= \sum_{(i,k)} \frac{\pi(s)\pi(t)\left(y_i y_k - F(x_i x_k)\right)}{2\pi'(x_i)\pi'(x_k)(s-x_i)(s-x_k)(t-x_i)(t-x_k)}. \end{aligned}$$

Darin bedeutet

$$\pi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varrho+1}),$$

$\pi'(x)$ die Ableitung von $\pi(x)$ und die Summation erstreckt sich über alle $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Combinationen (i, k) der $\varrho+1$ Zahlen $1, 2 \ldots \varrho+1$ zu zweien.

Zusatz: Die Gleichung (A) ist äquivalent mit dem System von $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Gleichungen

$$(B) \quad \wp(w_1, w_2 \ldots w_\varrho; x_i, x_k) = \frac{F(x_i, x_k) - y_i y_k}{2(x_i - x_k)^2}.$$

Satz II. Die Gleichung (A) läßt sich auch auf folgende Form bringen:

$$(C) \quad \begin{aligned} &\wp(w_1, w_2 \ldots w_\varrho; s, t) \\ &= \pi(s)\pi(t)\left\{\sum_{i=1}^{\varrho+1} \frac{y_i}{2(s-x_i)(t-x_i)\pi'(x_i)}\right\}^2 \\ &- \frac{R(s)\pi(t)}{4(t-s)^2\pi(s)} - \frac{R(t)\pi(s)}{4(s-t)^2\pi(t)} + \frac{F(s,t)}{2(t-s)^2}. \end{aligned}$$

Durch Specialisierungen ergeben sich hieraus Verallgemeinerungen der Formeln:

$$\wp \int_{(a,0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \frac{1}{24} R''(a) + \tfrac{1}{4} \frac{R'(a)}{x-a},$$

$$\wp(u) - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u},$$

$$\wp(\omega_\lambda) = e_\lambda,$$

die zum größeren Teile bereits aus Arbeiten der Herren Brioschi und Wiltheiß bekannt sind.

Freiburg i. B., Juli 1894.

Zur Theorie der Ideale.

Von

R. Dedekind in Braunschweig, ausw. Mitglied.

Vorgelegt am 10. September 1894.

Nachdem es mir in den Jahren 1869 und 1870 endlich gelungen war, durch Einführung neuer Begriffe die letzten Schwierigkeiten zu überwinden, welche sich meinen früheren Versuchen, eine strenge und ausnahmelose Theorie der Ideale zu begründen, entgegengestellt hatten, diente mir die hiermit gewonnene Grundlage in den nächstfolgenden Jahren theils zur Untersuchung specieller, insbesondere der cubischen Körper, theils zur Erforschung der allgemeinen Gesetze, welche die Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Körper beherrschen. Die letztere Frage, welche im Wesentlichen auf die Betrachtung derjenigen Körper zurückkommt, die ich Galois'sche Körper oder Normalkörper genannt habe, bot keine erheblichen Schwierigkeiten dar und konnte daher bald zu einem vollständigen Abschlusse gebracht werden. Von der Veröffentlichung dieser Untersuchung bin ich immer durch andere Beschäftigungen abgezogen, und nur gelegentlich habe ich ihrer Erwähnung gethan, z. B. im § 27 meiner Schrift Sur la théorie des nombres entiers algébriques (1877), wo ich den Satz ausgesprochen habe, daß aus den Idealen eines Normalkörpers die Ideale eines jeden in ihm als Divisor enthaltenen Körpers nach bestimmten Gesetzen abgeleitet werden können, und wo auch an einem sehr einfachen Beispiele die Kraft dieser von mir gefundenen Gesetze dargelegt ist[1]). Dies hat Herrn Frobenius, wie er mir in einem Schreiben vom 3. Juni 1882 aus Zürich mittheilte, zur selbständigen

1) Vergl. auch Compte rendu der Pariser Akademie vom 24. Mai 1880, und die Anmerkung auf S. 618 der vierten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (1894).

Durchforschung des Gegenstandes angeregt, durch welche er, wie sich bald herausstellte, zu einer nahezu vollständigen Uebereinstimmung mit mir gelangt war; da er zugleich wegen einer Nebenfrage eine Mittheilung meiner Resultate wünschte, so verfaßte ich in der Eile eine kurze Uebersicht derselben und fügte sie am 8. Juni meiner Antwort bei. Obgleich nun vor Kurzem Herr Hilbert seine auf denselben Gegenstand bezügliche Untersuchung in diesen Nachrichten (7. Juli 1894) veröffentlicht hat, so erlaube ich mir doch, die eben erwähnte Uebersicht, weil in ihr die Zerlegungen der Ideale noch allgemeiner ausgeführt sind [1]), ohne jeden Zusatz, nur mit Auslassung einiger unwesentlichen Worte jetzt mitzutheilen. —

Einige Sätze aus der Untersuchung der Beziehungen zwischen den Idealen in verschiedenen Körpern.

I. Ideale in Normalkörpern.

Bezeichnungen:

Ω ein Normalkörper vom Grade n.

Φ die Gruppe aller n Permutationen φ, durch welche Ω in sich selbst übergeht. — Bedeutet z irgend ein System von Zahlen des Körpers Ω oder auch eine einzelne solche Zahl, so bezeichne ich durch das Symbol $z\varphi$ das durch die Permutation φ aus z hervorgehende System [2]).

$\mathfrak{o}$ das Gebiet aller ganzen Zahlen ω des Körpers Ω. — Wenn ich in einer Gleichung oder Congruenz den Buchstaben ω benutze, so will ich damit sagen, daß sie für jede in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Zahl ω, also gewissermaßen identisch gilt.

$\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers Ω.

p die durch $\mathfrak{p}$ theilbare positive rationale Primzahl.

---

1) Auch die auf S. 235 von Herrn Hilbert aufgestellten Sätze über Partial-Discriminanten — von welchen die folgende Uebersicht unmittelbar gar nicht handelt — scheinen die Allgemeinheit derjenigen Resultate nicht ganz zu erreichen, zu welchen ich durch die am Schlusse der Einleitung zu meiner Abhandlung Ueber die Discriminanten endlicher Körper (1882) erwähnte Untersuchung gelangt war; auf diese gedenke ich später einzugehen. Dagegen ist mir die von Herrn Hilbert ausgeführte weitere Zerlegung der von ihm mit g_t, von mir mit X bezeichneten Gruppe neu gewesen.

2) Die im Originale benutzte Bezeichnung $z|\varphi$ ersetze ich hier durch die einfachere, welche ich in § 161 der vierten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (1894) eingeführt habe.

X die Gruppe aller derjenigen g Permutationen χ, für welche (identisch)

$$\omega\chi \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Dann giebt es eine Permutation

ψ_0 (oder vielmehr genau g solche Permutationen $\chi\psi_0$), für welche

$$\omega^p \equiv \omega\psi_0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Daraus folgen die Eigenschaften:

$$\psi_0^{-1}X\psi_0 = X, \text{ d. h. } X\psi_0 = \psi_0 X,$$

und der Grad von $\mathfrak{p}$ ist der kleinste positive Exponent

f, für welchen

$$X\psi_0^f = X, \text{ d. h. } \psi_0^f \text{ in } X \text{ enthalten.}$$

Also

$$N(\mathfrak{p}) = p^f.$$

Ferner ist die Gruppe (Bezeichnungsweise von Galois)

$$\Psi = X + X\psi_0 + X\psi_0^2 + \cdots + X\psi_0^{f-1} \text{ (vom Grade } fg)$$

der Inbegriff aller derjenigen Permutationen ψ, welche der Bedingung

$$\mathfrak{p}\psi = \mathfrak{p}$$

genügen (d. h. die Gruppe, zu welcher $\mathfrak{p}$ gehört). Setzt man endlich

$$\Phi = \Psi\varphi_1 + \Psi\varphi_2 + \cdots + \Psi\varphi_e, \text{ also } n = efg,$$

so entspricht jedem dieser e Complexe $\Psi\varphi_s$ ein mit $\mathfrak{p}$ conjugirtes Primideal

$$\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}\varphi_s;$$

diese e Primideale

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_e$$

sind verschieden von einander, und es ist

$$\mathfrak{o}p = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_e)^g$$
$$N(\mathfrak{p}_s) = p^f \text{ (unabhängig von } s).$$

Wird $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}_s$ ersetzt, so ist X, ψ_0, Ψ zu ersetzen durch $X_s = \varphi_s^{-1}X\varphi_s$, $\psi_{s,0} = \varphi_s^{-1}\psi_0\varphi_s$, $\Psi_s = \varphi_s^{-1}\Psi\varphi_s$. —

II. Ideale in den Divisoren eines Normalkörpers Ω.

Kennt man die (in I. erörterte) Constitution aller Primideale $\mathfrak{p}$ des Normalkörpers Ω, so folgt daraus für jeden in Ω als

Divisor enthaltenen Körper

Ω' durch alleinige Anwendung von Gruppen-Zerlegungen (also gewissermaßen aus rein algebraischen Principien) die vollständige Kenntniß aller Primideale

$\mathfrak{p}'$ in Ω'. Die Bezeichnungen in I. werden beibehalten. Bekannt ist:

Ω' gehört zu einer Permutations-Gruppe

Φ', bestehend aus allen denjenigen m (in Φ enthaltenen) Permutationen φ', die jede in Ω' enthaltene Zahl ungeändert lassen; dann ist

$$n = mn',$$

und n' ist der Grad von Ω' (umgekehrt, wenn Φ' eine in Φ enthaltene Gruppe ist, so giebt es immer einen und nur einen zugehörigen Körper Ω'). Es wird daher das erstrebte Ziel lediglich durch Vergleichung von Φ' mit den in I. betrachteten Permutationen und Gruppen erreicht. Dazu dient zunächst Folgendes, was weniger oder zum Theil gar nicht bekannt scheint.

Bedeutet φ_r eine bestimmte Permutation, so bezeichne ich mit $\Psi\varphi_r\Phi'$ den Complex aller von einander verschiedenen Permutationen von der Form $\psi\varphi_r\varphi'$, wo ψ, φ' resp. alle in den Gruppen Ψ, Φ' enthaltenen Permutationen durchlaufen; ist h_r der Grad des größten gemeinschaftlichen Theilers Ψ'_r der Gruppen $\varphi_r^{-1}\Psi\varphi_r = \Psi_r$ und Φ' (d. h. besteht Ψ'_r aus h_r Permutationen), so werden immer je h_r Producte $\psi\varphi_r\varphi'$ identisch, und das Product aus den Graden der Gruppen Ψ, Φ' (hier fg und m) ist daher das h_r-fache von der Anzahl der in $\Psi\varphi_r\Phi'$ enthaltenen Permutationen. Da ferner zwei solche Complexe $\Psi\varphi_r\Phi'$, $\Psi\varphi_s\Phi'$ entweder ganz identisch sind, oder keine einzige gemeinschaftliche Permutation haben, so kann man setzen:

$$\Phi = \Psi\varphi_1\Phi' + \Psi\varphi_2\Phi' + \cdots + \Psi\varphi_{e'}\Phi'.$$

Dies ist, beiläufig gesagt, die Grundlage für die Untersuchung der algebraischen Reciprocität zwischen zwei beliebigen endlichen Körpern, nämlich denen, welche zu den Gruppen Ψ und Φ' gehören (Einwirkung zweier beliebigen irreducibelen Gleichungen auf einander, Zerlegung jeder in e' Factoren). Zugleich ist

$$\Phi = \Phi'\varphi_1^{-1}\Psi + \cdots + \Phi'\varphi_{e'}^{-1}\Psi.$$

Diese allgemeine Zerlegung einer Gruppe Φ nach zwei

in ihr enthaltenen Gruppen Ψ, Φ' giebt für unseren Fall Alles, was wir wünschen; durch folgende Bestimmungen.

Es sei φ_r eine bestimmte der in der obigen Zerlegung benutzten e' Permutationen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{e'}$, und

$\mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}\varphi_r$,

$\mathfrak{p}'_r$ das durch $\mathfrak{p}_r$ theilbare Primideal in Ω',

g_r der Grad des grössten gemeinsamen Theilers

X'_r von $X_r = \varphi_r^{-1} X \varphi_r$ und Φ', daher

a_r definirt durch $g = a_r g_r$, so ist

$$\mathfrak{o}' p = \mathfrak{p}'^{a_1}_1 \mathfrak{p}'^{a_2}_2 \dots \mathfrak{p}'^{a_{e'}}_{e'}, \text{ wo}$$

$\mathfrak{o}'$ das System aller ganzen Zahlen des Körpers Ω'.

Die Anzahl e' der Complexe $\Psi\varphi_r\Phi'$, aus denen Φ besteht, ist daher zugleich die Anzahl aller von einander verschiedenen, in p aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2 \dots \mathfrak{p}'_{e'}$ des Körpers Ω', und die Zerlegung von p in diesem Körper ist gefunden; die Bestimmung der Normen dieser Primideale $\mathfrak{p}'$ und ihre Zerlegung in Ω folgt jetzt. Es sei, wie oben,

Ψ'_r der größte gemeinsame Theiler der Gruppen

$\Psi_r = \varphi_r^{-1} \Psi \varphi_r$ und Φ',

h_r der Grad von Ψ'_r, folglich

$$\Phi' = \Psi'_r \varphi'_{r,1} + \Psi'_r \varphi'_{r,2} + \dots + \Psi'_r \varphi'_{r,e_r}; \quad m = h_r e_r,$$

$\mathfrak{p}_{r,s} = \mathfrak{p}_r \varphi'_{r,s}$, so ist

$$\mathfrak{o}\mathfrak{p}'_r = (\mathfrak{p}_{r,1} \mathfrak{p}_{r,2} \dots \mathfrak{p}_{r,e_r})^{g_r}$$

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{e'} = e.$$

Hiermit ist die Zerlegung erledigt (die letzte Gleichung folgt daraus, daß $e_r fg$ die Anzahl der in $\Psi\varphi_r\Phi'$ enthaltenen Permutationen ist). Endlich: da X'_r auch der größte gemeinsame Theiler von X_r und Ψ'_r ist (weil X_r Divisor von Ψ_r), so ist h_r theilbar durch g_r, also

f_r definirt durch $h_r = f_r g_r$,

und nach der obigen Regel besteht der Complex $X_r \Psi'_r$ aus $f_r g$ Permutationen, welche alle in Ψ_r enthalten sind (weil X_r und Ψ'_r Divisoren von Ψ_r), und da dieser Complex $X_r \Psi'_r$ zugleich eine Gruppe ist (weil $X_r \psi_r = \psi_r X_r$), so ist fg (als Grad von Ψ_r) theilbar durch $f_r g$ (als Grad von $X_r \Psi'_r$), mithin

f'_r definirt durch $f = f_r f'_r$. Dann ist

$$N'(\mathfrak{p}'_r) = (\mathfrak{o}', \mathfrak{p}'_r) = p^{f'_r}$$

und

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_{r,s}) = \mathfrak{p}_r'^{f_r} \text{ (unabhängig von } s\text{)},$$

wo $\mathfrak{N}$ das Symbol für die in Bezug auf Ω' genommene Partialnorm von Zahlen oder Idealen des Körpers Ω bedeutet. — Sind Ω, Ω' zwei beliebige endliche Körper, so gehört zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers Ω ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}' = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ des Körpers Ω', die Partialnorm von $\mathfrak{a}$ nach Ω', und es ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\,\mathfrak{N}(\mathfrak{b})$. —

III. Verallgemeinerung.

Dieselben Sätze gelten ohne nennenswerthe Wortänderung, wenn man an Stelle des Körpers R der rationalen Zahlen einen beliebigen endlichen Körper P setzt, und unter Ω einen endlichen Körper versteht, welcher P als einen Divisor enthält und zwar ein Normalkörper in Bezug auf P ist (d. h. daß Ω durch alle diejenigen Permutationen, welche jede Zahl in P ungeändert lassen, in sich selbst übergeht). Für die Zerlegung der Primideale p des Körpers P in Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers Ω gelten genau dieselben Gesetze wie in I. Sind ferner alle diese Zerlegungen bekannt, so erhält man daraus nach den in II. angegebenen Gesetzen sowohl die Zerlegung jedes Primideals p in Primideale $\mathfrak{p}'$ eines Körpers Ω', welcher Multiplum von P und Divisor von Ω ist, als auch die Zerlegung dieser Primideale $\mathfrak{p}'$ in Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers Ω. Und diese Verallgemeinerung kann noch weiter getrieben werden. —

8. Juni 1882.

Ueber das Gleichgewicht zwischen einem festen, homogen deformirten Körper und einer flüssigen Phase, insbesondere über die Depression des Schmelzpunctes durch einseitige Spannung.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. October 1894.

1. Die allgemeine Bedingung des Gleichgewichtes.

Wir denken uns den Körper sammt der Flüssigkeit eingeschlossen in eine Hülle, deren Wandung beweglich ist, so daß der Druck und das Volumen im Inneren innerhalb gewisser Grenzen verändert werden kann. Auf die Oberfläche des Körpers wirkt einmal der überall gleiche Flüssigkeitsdruck p; außerdem aber sei sie gewissen Zugkräften unterworfen, deren auf die Flächeneinheit bezogene Componenten durch $\overline{\Xi}$, $\overline{H}$, $\overline{Z}$ bezeichnet werden mögen. Ein Element der Oberfläche sei dS, die Verschiebungen, die es in Folge der darauf wirkenden Kräfte in der Richtung der Coordinatenaxen erleidet, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, seine äußere Normale n. Die Energie des festen Körpers werde bezeichnet durch ε_1, seine Entropie durch η_1, sein Potential durch μ_1, seine Masse durch m_1. Die absolute Temperatur sei T, das mechanische Aequivalent der Wärme $\mathfrak{A}$. Für den Zuwachs der Energie des festen Körpers ergiebt sich:

$$1)\quad d\varepsilon_1 = \mathfrak{A}T d\eta_1 + S\left\{\left(\overline{\Xi} - p\cos(n,x)\right)\delta\xi + \left(\overline{H} - p\cos(n,y)\right)\delta\eta + \left(\overline{Z} - p\cos(n,z)\right)\delta\zeta\right\} dS + \mu_1 dm_1.$$

Bezeichnen wir durch ε_2, η_2, v_2, μ_2 und m_2 Energie, Entropie, Volumen, Potential und Masse der flüssigen Phase, so ergiebt sich die Gleichung

$$2)\quad d\varepsilon_2 = \mathfrak{A}T d\eta_2 - p dv_2 + \mu_2 dm_2.$$

Hier haben wir unter dv_2 die ganze Aenderung zu verstehen, die das Volumen der Flüssigkeit erleidet; ist also v das Volumen des von der Flüssigkeit und dem festen Körper zusammen eingenommenen Raumes, v_1 das Volumen des festen Körpers, so ist $v_2 = v - v_1$ und

3) $$dv_2 = dv - dv_1.$$

Der Zuwachs dv_1 setzt sich zusammen aus zwei Theilen; einmal wächst das Volumen des Körpers dadurch, daß seine Oberflächenelemente die durch $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gegebenen Verschiebungen erleiden; andererseits dadurch, daß die Flüssigkeitsmenge dm_1 sich in fester Form niederschlägt. Ist ω_1 das specifische Volumen des Körpers im deformirten Zustand, so wird

4) $$dv_1 = S\left(\cos(n, x)\,\delta\xi + \cos(n, y)\,\delta\eta + \cos(n, z)\,\delta\zeta\right) dS + \omega_1\, dm_1.$$

Benutzen wir diesen Werth, so erhalten wir durch Addition der Gleichungen 1 und 2 für den Energiezuwachs des ganzen aus der flüssigen und festen Phase zusammengesetzten Systems:

5) $$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \mathfrak{A}T(d\eta_1 + d\eta_2) + S(\overline{\Xi}\delta\xi + \overline{H}\delta\eta + \overline{Z}\delta\zeta)\, dS$$
$$- pdv + p\,\omega_1 dm_1 + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2.$$

Der Zuwachs der Energie muß aber durch die zugeführte Wärme und Arbeit vollkommen gedeckt sein, wenn das System im Gleichgewicht sich befindet, d. h. keinem von selbst eintretenden und irreversibel fortschreitenden Umsatz seiner inneren Energie unterworfen ist. Als Bedingung für das Gleichgewicht der beiden Phasen ergiebt sich daher mit Rücksicht auf $dm_1 + dm_2 = 0$

6) $$\mu_1 + p\omega_1 = \mu_2.$$

2. Der Fall der homogenen Deformation.

Die Axen des Coordinatensystems mögen mit den Richtungen der Hauptdilatationen zusammen fallen; diese letzteren seien x_x, y_y, z_z, die ihnen entsprechenden Drucke X_x, Y_y, Z_z. Bei homogener Deformation haben diese Größen in dem ganzen Inneren des Körpers dieselben Werthe. Als Normalzustand des letzteren betrachten wir denjenigen, in welchem die Temperatur gleich T_0, die Dilatationen x_x, y_y, z_z gleich Null sind. Das specifische Volumen des Körpers in diesem Zustande bezeichnen wir durch ω_0; es ist dann:

7) $$\omega_1 = \omega_0 + \omega_0(x_x + y_y + z_z).$$

Die Gleichung der Energie für den festen Körper kann nun auch in folgender Form geschrieben werden:

8) $$d\varepsilon_1 = \mathfrak{A} T\,d\eta_1 - (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z)\,\omega_1 m_1 + \mu_1 dm_1.$$

Woraus

9) $$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta_1} = \mathfrak{A} T, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial m_1} = \mu_1.$$

Die Energie ε_1, sofern sie durch eine Funktion der Veränderlichen η_1, m_1, x_x, y_y, z_z dargestellt wird, muß in η_1 und m_1 linear und homogen sein; es gilt somit die Gleichung

10) $$\varepsilon_1 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial m_1} m_1 = \mathfrak{A} T \eta_1 + \mu_1 m_1.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung kann die Bedingung 6) für das Gleichgewicht des Systemes auf die Form gebracht werden

11) $$\varepsilon_1 - \mathfrak{A} T \eta_1 + p\,\omega_1 m_1 = \mu_2 m_1$$

eine Gleichung, die auf anderem Wege von Gibbs abgeleitet worden ist.

3. Die Berührungsebenen der Gleichgewichtsfläche.

Aus Gleichung (10) folgt:

$$d\varepsilon_1 = \mathfrak{A} T\,d\eta_1 + \mathfrak{A}\eta_1\,dT + \mu_1 dm_1 + m_1 d\mu_1.$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung (8), so ergiebt sich

12) $$\mathfrak{A}\eta_1\,dT + (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z)\,\omega_1 m_1 + m_1 d\mu_1 = 0$$

oder wenn wir für μ_1 seinen Werth aus Gleichung (6) substituiren

12′) $$\mathfrak{A}\frac{\eta_1}{m_1}dT + (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z)\,\omega_1 + d\mu_2 - d(p\omega_1) = 0.$$

Für die flüssige Phase gilt die Gleichung

13) $$\mathfrak{A}\frac{\eta_2}{m_2}dT - \omega_2 dp + d\mu_2 = 0.$$

Hier bezeichnet ω_2 das specifische Volumen der flüssigen Phase. Zieht man die Gleichung (12′) von (13) ab, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2} - \frac{\eta_1}{m_1}\right)dT - (\omega_2 - \omega_1)\,dp$$
$$-(X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z)\,\omega_1 + p\,d\omega_1 = 0.$$

Nun ist $d\omega_1 = \omega_1(dx_x + dy_y + dz_z)$.

Man erhält somit:

$$14)\quad \mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2}-\frac{\eta_1}{m_1}\right)dT-(\omega_2-\omega_1)\,dp$$
$$=\{(X_x-p)\,dx_x+(Y_y-p)\,dy_y+(Z_z-p)\,dz_z\}\,\omega_1.$$

Eine ähnliche Gleichung wurde auch von Gibbs in seiner fundamentalen Abhandlung entwickelt.

Wir wenden das gefundene Resultat an auf den Fall eines rechtwinkligen Prismas, das in einer gesättigten Lösung seiner Substanz aufgehängt ist; seine Kanten seien den Axen des Coordinatensystems parallel. Auf seine Flächen wirken außer dem gleichmäßigen Druck der Flüssigkeit Spannkräfte, die bezogen auf die Flächeneinheit durch $\overline{\Xi}$, $\overline{H}$, $\overline{Z}$ bezeichnet werden mögen. Es ist dann:

$$X_x=p-\overline{\Xi},\qquad Y_y=p-\overline{H},\qquad Z_z=p-\overline{Z}.$$

Hiermit verwandelt sich die Gleichung (14) in

$$15)\quad \mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2}-\frac{\eta_1}{m_1}\right)dT-(\omega_2-\omega_1)\,dp=-\{\overline{\Xi}\,dx_x+\overline{H}\,dy_y+\overline{Z}\,dz_z\}\,\omega_1.$$

Wir betrachten den speciellen Fall, daß auf das Prisma nur in der Richtung der x-Axe ein Zug ausgeübt, daß die Spannungen $\overline{H}$ und $\overline{Z}$ gleich Null sind. Unsere Gleichung wird jetzt:

$$16)\quad \mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2}-\frac{\eta_1}{m_1}\right)dT-(\omega_2-\omega_1)\,dp=-\overline{\Xi}\,\omega_1\,dx_x.$$

Als unabhängige Veränderliche erscheinen T, p und x_x. Wenn das durch den festen Körper und die Lösung gebildete System sich im Gleichgewichte befindet, so besteht zwischen diesen Größen eine Beziehung, die sich graphisch durch eine Fläche darstellen läßt. Sind T, p und x_x irgend 3 zusammengehörige Werthe der Veränderlichen, so entspricht ihnen ein Punkt P der Fläche, dessen rechtwinklige Coordinaten eben gleich T, p und x_x sind. Gehen wir von P zu einem benachbarten Punkt der Fläche über, so sind die Zuwüchse der Coordinaten durch die Gleichung (16) verbunden und diese stellt somit die Tangentialebene der Gleichgewichtsfläche in dem Punkte P dar.

4. Depression des Schmelzpunktes durch einseitigen Zug oder Druck.

Ziehen wir auf der Fläche eine Curve konstanten Druckes, so gilt für jedes ihrer Elemente die Gleichung

17) $$\mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2}-\frac{\eta_1}{m_1}\right)dT = -\overline{\Xi}\omega_1 dx_y.$$

Die Entropie der Masseneinheit sei im flüssigen Zustand größer als im festen; $\overline{\Xi}$ sei positiv, bedeute also einen in der Richtung der x Axe ausgeübten Zug; einer zunehmenden Dilatation in der Richtung der x-Axe entspricht dann eine Abnahme der Schmelztemperatur. Ebenso wirkt bei negativem $\overline{\Xi}$, d.h. bei einem auf das Prisma ausgeübten Drucke, eine wachsende Compression in der Druckrichtung. Wird die Temperatur künstlich auf dem ursprünglichen Werthe erhalten, so wird der feste Körper in dem einen wie in dem anderen Falle schmelzen.

Das in der Gleichung (17) enthaltene Resultat wird anschaulicher, wenn wir an Stelle von x_x den Zug $\overline{\Xi}$ als dritte unabhängige Veränderliche benützen. Wir setzen zu diesem Zweck:

18) $$x_x = \frac{\overline{\Xi}}{E} - \frac{(1-2\varkappa)p}{E} + \alpha\vartheta.$$

Hier ist E der Elasticitätskoëfficient des Prismas, $\varkappa$ das Verhältniß der Querkontraktion zur Längsdilatation, α der Coëfficient der Wärmeausdehnung; ϑ bezeichnet den Ueberschuß der Temperatur über eine bestimmte Normaltemperatur T_0; die absolute Temperatur ist dann gegeben durch

$$T = T_0 + \vartheta$$

und es ist $$dT = d\vartheta.$$

Bei konstantem Drucke wird

$$dx_x = \frac{1}{E}d\overline{\Xi} + \alpha\, d\vartheta.$$

Substituiren wir diesen Werth in Gleichung (17), so ergiebt sich:

$$\left\{\mathfrak{A}\left(\frac{\eta_2}{m_2}-\frac{\eta_1}{m_1}\right) + \alpha\omega_1\overline{\Xi}\right\} d\vartheta = -\frac{\omega_1}{E}\overline{\Xi}d\overline{\Xi}.$$

Die Differenz der specifischen Entropieen im flüssigen und festen Zustand ist gleich der Schmelzwärme Q der Masseneinheit dividirt durch die absolute Temperatur. Die Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

19) $$\left\{\frac{\mathfrak{A}Q}{T} + \alpha\omega_1\overline{\Xi}\right\} d\vartheta = -\frac{\omega_1}{E}\overline{\Xi}d\overline{\Xi}.$$

Setzen wir voraus, daß die zu betrachtenden Temperaturänderungen ϑ sehr klein sind, so können wir T ersetzen durch T_0.

Das specifische Volumen ω_1 kann nach Gleichung (7) reducirt werden auf seinen Werth bei dem Normalzustande des Körpers. Man findet

$$\omega_1 = \omega_0 \left\{1 + \frac{1-2\varkappa}{E}\overline{\Xi} - \frac{3(1-2\varkappa)}{E} p + 3\alpha\vartheta\right\}.$$

In erster Annäherung kann ω_1 ersetzt werden durch ω_0, und es ergiebt sich dann die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{A}Q}{T_0} + \alpha\omega_0\overline{\Xi}\right) d\vartheta = -\frac{\omega_0}{E}\overline{\Xi}\, d\overline{\Xi}.$$

Vernachlässigt man in der links stehenden Klammer das zweite Glied gegen das erste, und betrachtet man Q als konstant, so wird das Integral

20) $$\vartheta = -\tfrac{1}{2}\frac{\omega_0 T_0}{\mathfrak{A}QE}\overline{\Xi}^2.$$

Für ein Prisma von Eis ist im absoluten cm, g, sec System:

$$\omega_0 = 1{,}09$$
$$\mathfrak{A}Q = 80 \times 4{,}2 \times 10^7 \text{ Erg}$$
$$E = 232 \times 10^8 \text{ Dynen} \mid \text{cm}^2.$$

Somit

$$\vartheta = -\frac{1{,}09 \times 273}{80 \times 4{,}2 \times 10^7 \times 232 \times 10^8}\overline{\Xi}^2.$$

Bezeichnen wir den in kg Gewichten pro qmm ausgeübten Zug durch $\overline{\Xi}_t$, so ist

$$\overline{\Xi} = 981 \times 10^5 \overline{\Xi}_t$$

und somit

$$\vartheta = -\frac{1{,}09 \times 273 \times 981^2 \times 10^{10}}{80 \times 4{,}2 \times 10^7 \times 232 \times 10^8} \cdot \overline{\Xi}_t^2$$

oder

21) $$\vartheta = -0{,}036 \times \overline{\Xi}_t^2$$

wo $\overline{\Xi}_t$ in kg Gewichten pro qmm anzugeben ist.

Die Zugfestigkeit des Eises beträgt 0,7 kg Gewicht pro qmm; einem solchen Zuge würde eine Erniedrigung des Gefrierpunktes um 0,017° Cels. entsprechen.

Allgemein giebt die Formel 20 noch zu der folgenden Bemerkung Veranlassung. In einer gesättigten Lösung befinden sich zwei Prismen, die aus der gelösten Substanz hergestellt sind. Wird das eine einem longitudinalen Zuge oder Drucke unterworfen, so wird sein Schmelzpunkt erniedrigt. Bei konstanter Temperatur tritt Schmelzung ein, und die Concentration der Lösung

wird vermehrt; das zweite Prisma aber ist mit dieser im Gleichgewicht nur bei der ursprünglichen Concentration. Die Wiederherstellung des Gleichgewichtes kann nur durch Auskrystallisiren der gelösten Substanzmenge erfolgen. Wenn diese auf dem zweiten Prisma sich niederschlägt, so wächst seine Masse auf Kosten des deformirten. Es knüpft sich hieran die Frage, ob bei natürlichen Krystallen Wachsthumserscheinungen vorkommen, die auf diesem Wege sich bilden könnten.

5. Der Fall eines allseitig gleichen Druckes.

Wenn der feste Körper einem allseitig gleichen Drucke unterworfen wird, so können wir in Gleichung (14) $X_x = Y_y = Z_z = P$ setzen und erhalten:

$$21) \qquad \mathfrak{A}Q\frac{dT}{T} - (\omega_2 - \omega_1)\,dp = (P-p)\,\omega_1\, d(x_x + y_y + z_z).$$

Unter der Voraussetzung, daß der Druck $P = p$, der feste Körper nur dem Druck der umgebenden Flüssigkeit unterworfen ist, sei sein specifisches Volumen bei der Temperatur T gleich ω. Man kann dann in der vorhergehenden Formel auf der rechten Seite an Stelle von ω_1 ohne Bedenken ω setzen. Es ist ferner

$$d(x_x + y_y + z_z) = -\frac{3(1-2\varkappa)}{E}\,dP + 3\alpha\,dT$$

und daher

$$(P-p)\,\omega\, d(x_x + y_y + z_z) = -\frac{3(1-2\varkappa)}{E}(P-p)\,\omega\, dP + 3\alpha(P-p)\,\omega\, dT.$$

Andererseits ist:

$$\omega_1 - \omega = -\frac{3(1-2\varkappa)}{E}(P-p)\,\omega.$$

Somit:

$$22) \qquad \mathfrak{A}Q\frac{dT}{T} - (\omega_2 - \omega_1)\,dp - (\omega_1 - \omega)\,dP = 3\alpha(P-p)\,\omega\, dT.$$

Für $P = p$ ergiebt sich die bekannte Gleichung

$$\mathfrak{A}Q\frac{dT}{T} = (\omega_2 - \omega)\,dp.$$

Vernachlässigt man in Gleichung (22) das auf der rechten Seite stehende Glied, so kann man sie auf die von Le Chatelier (C. R. 114. p. 62. 1892) benutzte Form

$$\mathfrak{A}Q\frac{dT}{T} - p(\omega_2 - \omega_1)\frac{dp}{p} - P(\omega_1 - \omega)\frac{dP}{P} = 0$$

bringen.

Ueber die Zustandsgleichung von Clausius.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. October 1894.

Von einem einfachen Gase sei gegeben die Menge m; das Volumen sei v, die absolute Temperatur T, der Druck p; R sei die Constante des Gasgesetzes, a, b, c drei weitere Constanten; dann ist nach Clausius:

$$1) \qquad p = \frac{mRT}{v-b} - \frac{m^2 a}{T(v+c)^2}.$$

Aus der Energiegleichung $d\varepsilon = \mathfrak{A} T d\eta - p dv$ folgt in bekannter Weise

$$\mathfrak{A} \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{mR}{v-b} + \frac{m^2 a}{T^2 (v+c)^2}$$

und hieraus

$$2) \qquad \mathfrak{A}\eta = m\Theta + mR \log \frac{v-b}{m} - m \frac{ma}{T^2(v+c)}.$$

Hier bezeichnet Θ eine zunächst noch unbestimmte Funktion der Temperatur. Wir haben ferner:

$$d(\varepsilon - \mathfrak{A} T\eta + pv) = -\mathfrak{A}\eta dT + vdp$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$d(\varepsilon - \mathfrak{A} T\eta + pv) = -m\Theta dT$$

$$+ m \left\{ \frac{Rv}{v-b} - R \log \frac{v-b}{m} + \frac{ma}{T^2(v+c)} + \frac{mav}{T^2(v+c)^2} \right\} dT$$

$$+ m \left\{ -\frac{RTv}{(v-b)^2} + \frac{2mav}{T(v+c)^3} \right\} dv$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke erweisen sich als

die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach T und v; man kann daher integriren und erhält:

3) $$\varepsilon - \mathfrak{A}T\eta + pv$$
$$= -m\int \Theta dT + mR\left\{\frac{v}{v-b} - \log\frac{v-b}{m}\right\}T$$
$$-\frac{m^2a}{T(v+c)}\left(1+\frac{v}{v+c}\right).$$

Setzen wir andererseits

4) $$\varepsilon = \mathfrak{A}T\eta - pv + \mu m$$

so wird

5) $$\mu = -\int \Theta dT + R\left\{\frac{v}{v-b} - \log\frac{v-b}{m}\right\}T - \frac{ma}{T(v+c)}\left(1+\frac{v}{v+c}\right).$$

Den Gleichungen (1), (2) und (5) zufolge sind p, T und μ Funktionen nullter Ordnung in η, v und m. Die Energie erscheint somit in Gleichung (4) als eine homogene Funktion erster Ordnung in η, v und m; es ist

$$\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\eta + \frac{\partial\varepsilon}{\partial v}v + \frac{\partial\varepsilon}{\partial m}m$$

und

$$\mu = \frac{\partial\varepsilon}{\partial m}$$

d. h. die durch Gleichung (5) gegebene Funktion ist das thermodynamische Potential.

Setzt man in Gleichung (1)

6) $$v' = v + c \text{ und } b' = b + c$$

so wird:

7) $$p = \frac{mRT}{v'-b'} - \frac{m^2a}{Tv'^2}.$$

Bezeichnet man die kritischen Werthe der Variabeln v', p und T durch φ_0', π_0 und ϑ_0 so hat man die Beziehungen:

$$b' = \tfrac{1}{3}\varphi_0', \qquad m^2a = 3\pi_0\varphi_0'^2\vartheta_0, \qquad mR = \tfrac{8}{3}\frac{\pi_0\varphi_0'}{\vartheta_0}.$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (7), so ergiebt sich:

$$\frac{p}{\pi_0} = \frac{8}{3\frac{v'}{\varphi_0'} - 1} \frac{T}{\vartheta_0} - \frac{3}{\frac{T}{\vartheta_0} \cdot \frac{v'^2}{\varphi_0'^2}}.$$

Drücken wir die Veränderlichen p, v' und T durch die Vielfachen ihrer kritischen Werthe aus, so bekommen wir die reducirten Variabeln:

$$\frac{p}{\pi_0} = \pi, \quad \frac{v'}{\varphi_0'} = \varphi', \quad \frac{T}{\vartheta_0} = \vartheta$$

und erhalten:

8) $$\pi = \frac{8}{3\varphi' - 1}\vartheta - \frac{3}{\vartheta\varphi'^2}.$$

Setzen wir ferner

9) $$c = \gamma\varphi_0'$$

so wird

$$\frac{1}{R\vartheta_0}\left\{\mu + \int \Theta dT + RT \log \frac{3R\vartheta_0}{8\pi_0}\right\}$$

10) $$= \left\{\frac{\varphi' - \gamma}{\varphi' - \frac{1}{3}} - \log\left(\varphi' - \tfrac{1}{3}\right)\right\}\vartheta - \frac{9}{4}\frac{1}{\vartheta\varphi'}\left(1 - \frac{\gamma}{2\varphi'}\right).$$

Zur Berechnung von γ hat man die Gleichung

$$\gamma = \frac{c}{\varphi_0'} = \frac{c}{3(b+c)}.$$

Nun ist nach Clausius für Kohlensäure $c = 0{,}000977$, $b = 0{,}000843$, somit $\gamma = 0{,}179$. Nach Kuenen für Chlormethyl $c = 0{,}00165$, $b = 0{,}00135$, somit $\gamma = 0{,}184$. Im Mittel wollen wir für diese beiden Gase setzen:

$$\gamma = 0{,}18.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{T}$ eine nur von der Temperatur abhängende Funktion, so können wir nun Gleichung (7) in folgender Weise schreiben:

11) $$\frac{\mu}{R\vartheta_0} + \mathfrak{T} = \left\{\frac{\varphi' - 0{,}18}{\varphi' - \frac{1}{3}} - \log\left(\varphi' - \tfrac{1}{3}\right)\right\}\vartheta - \tfrac{9}{4}\frac{1}{\vartheta\varphi'}\left(1 - \frac{0{,}09}{\varphi'}\right).$$

Für koëxistirende Phasen müssen Druck, thermodynamisches Potential und Temperatur gleich sein. Wenn wir also bei den

durch die Gleichungen (8) und (11) dargestellten Curven zwei verschiedene Abscissen φ_1' und φ_2' so bestimmen, daß ihnen auf beiden Punkte mit gleichen Ordinaten entsprechen, so repräsentiren diese den Zustand der Flüssigkeit und des Dampfes bei dem Sättigungsdruck. Nach einem graphischen Verfahren, das ich in einer früheren Mittheilung geschildert habe[1]) ergiebt sich:

$$\varphi_1' = 0{,}421, \qquad \varphi_2' = 23{,}8$$

und der zugehörige Werth des reducirten Druckes

$$\pi = 0{,}080.$$

Bezeichnen wir wie zu Anfang das wahre Volumen des Körpers durch v, den wahren Werth des kritischen Volumens durch φ_0, so ist das reducirte Volumen

$$\varphi = \frac{v}{\varphi_0} = \frac{v' - c}{\varphi_0' - c}$$

oder wenn wir $c = \gamma\varphi_0'$ setzen

$$\text{12)} \qquad \varphi = \frac{\varphi_0' - \gamma}{1 - \gamma}.$$

Somit ergiebt sich bei der reducirten Temperatur $\vartheta = 0{,}75$ und dem entsprechenden Sättigungsdrucke $\pi = 0{,}080$ für die Flüssigkeit das reducirte Volumen $\varphi_1 = 0{,}280$ und für den Dampf das reducirte Volumen $\varphi_2 = 29{,}5$. Wir stellen diese Zahlen im Folgenden zusammen, einerseits mit denen, die sich für Fluorbenzol aus den Beobachtungen ergeben, andererseits mit den nach der Zustandsgleichung von van der Waals berechneten.

$$\vartheta = 0{,}75.$$

	π	φ_1	φ_2
Berechnet nach der Formel von van der Waals	0,288	0,489	5,53
Berechnet nach der Formel von Clausius	0,080	0,280	29,5
Aus den Beobachtungen bei Fluorbenzol	0,115	0,415	23,7

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1894 No. 2. p. 117. Wied. Ann. 1894. Bd. 53. p. 379.

Die Formel von Clausius schließt sich hiernach den Beobachtungen besser an als die von van der Waals; ihre Abweichungen von der Beobachtung liegen nach der entgegengesetzten Seite, wie bei der letzteren und würden sich durch eine andere Wahl der disponibeln Constanten noch verkleinern lassen.

Der im Vorhergehenden eingeschlagene Weg dürfte von Vortheil sein auch in dem Falle eines aus zwei Componenten gemischten Gases. Wir schreiben in diesem die Zustandsgleichung von Clausius in der Form:

$$p = \frac{(m_1 R_1 + m_2 R_2)\, T}{v - b} - \frac{m_1^2 a_1 + 2 m_1 m_2 a + m_2^2 a_2}{T(v+c)^2}.$$

Zunächst ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}\eta = m_1 \Theta_1 + m_2 \Theta_2 + m_1 R_1 \log \frac{v-b}{m_1} + m_2 R_2 \log \frac{v-b}{m_2}$$

$$- \frac{m_1^2 a_1 + 2 m_1 m_2 a + m_2^2 a_2}{T^2 (v+c)}.$$

Weiter mit Benutzung der Gleichungen

$$d(\varepsilon - \mathfrak{A} T \eta + pv) = -\mathfrak{A}\eta dT + v dp$$

und

$$\varepsilon - \mathfrak{A} T \eta + pv = m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2:$$

$$m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 = -m_1 \int \Theta_1 dT - m_2 \int \Theta_2 dT$$

$$+ \frac{m_1 R_1 T v}{v-b} + \frac{m_2 R_2 T v}{v-b}$$

$$- m_1 R_1 T \log \frac{v-b}{m_1} - m_2 R_2 T \log \frac{v-b}{m_2}$$

$$- \frac{m_1^2 a_1 + 2 m_1 m_2 a + m_2^2 a_2}{T(v+c)} \left(1 + \frac{v}{v+c}\right).$$

Wenn man nun hinzunimmt, daß die Potentiale μ_1 und μ_2 aus den Constanten der beiden Componenten in entsprechender Weise sich aufbauen müssen, so gelangt man zu den folgenden Ansätzen:

$$\mu_1 = -\int \Theta_1 dT + R_1 \left\{ \frac{v}{v-b} - \log \frac{v-b}{m_1} \right\} T$$

$$- \frac{m_1 a_1 + m_2 a}{T(v+c)} \left(1 + \frac{v}{v+c}\right)$$

$$\mu_2 = -\int \Theta_2 dT + R_2 \left\{ \frac{v}{v-b} - \log \frac{v-b}{m_2} \right\} T$$

$$- \frac{m_1 a + m_2 a_2}{T(v+c)} \left(1 + \frac{v}{v+c}\right).$$

Bei einer gegebenen Temperatur seien zwei verschiedene Phasen a und b des Gemisches mit einander im Gleichgewicht. Sind μ_1^a und μ_1^b, μ_2^a und μ_2^b die Potentiale der Componenten in den Phasen a und b, so bestehen die Gleichungen

$$\mu_1^a = \mu_1^b \text{ und } \mu_2^a = \mu_2^b.$$

Außerdem muß der Druck p für beide Phasen gleich sein. Mit Hülfe dieser Beziehungen würde man die Dampfspannungen von Mischungen in ähnlicher Weise bestimmen können wie im Vorhergehenden die eines einfachen Gases. Wenn die eine der beiden Componenten dadurch entsteht, daß Moleküle der anderen zu complicirteren Aggregaten sich vereinigen, so findet zwischen den Potentialen μ_1 und μ_2 eine lineare Beziehung statt. Auf Grund hiervon würde man die Veränderungen untersuchen können, die in dem Verhalten eines Gases durch molekulare Umlagerungen hervorgebracht werden.

Ueber die Theorie der Ideale.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. October durch den vorsitzenden Secretär.

Die Dedekind-Kronecker'sche Idealtheorie läßt sich mit Hülfe eines leicht zu beweisenden algebraischen Satzes wesentlich vereinfachen. Ich theile diesen Satz im Folgenden unter No. I mit und gebe dann, daran anknüpfend, in kurzen Zügen die Grundlagen der Idealtheorie. Der Einfachheit halber beschränke ich meine Entwicklungen auf algebraische Zahlen, bemerke jedoch, daß sich dieselben leicht auch auf algebraische Functionen ausdehnen lassen.

I.

Der erwähnte algebraische Satz lautet:

Wenn die Coefficienten $\alpha_0, \ldots \alpha_r$, $\beta_0, \ldots \beta_s$ der Functionen

$$\varphi(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r,$$
$$\psi(x) = \beta_0 x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s$$

ganze algebraische Zahlen sind, wenn ferner die ganze algebraische Zahl ω jeden der Coefficienten $\gamma_0, \ldots \gamma_{r+}$ des Produktes

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x) = \gamma_0 x^{r+s} + \gamma_1 x^{r+s-1} + \cdots + \gamma_{r+s}$$

theilt, so ist auch jede der $(r+1)(s+1)$ Zahlen

$$\alpha_i \beta_k \qquad (i = 0, 1, \ldots r;\ k = 0, 1, \ldots s)$$

durch ω theilbar.

Beim Beweise setze ich, wie das offenbar gestattet ist, α_0 und β_0 von Null verschieden voraus. Es ist dann auch $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$ von Null verschieden. Zur Abkürzung bezeichne ich ferner die Zahlen

$\alpha_0\beta_1$, $\alpha_0\beta_2$, ... $\alpha_0\beta_s$ der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ... ξ_s und mit ξ irgend eine dieser s Zahlen. Da nun

$$\alpha_0\psi(x) = \gamma_0 x^s + \xi_1 x^{s-1} + \xi_2 x^{s-2} + \cdots + \xi_s$$

ein Factor von $f(x)$ ist, so stellt sich $\pm\frac{\xi}{\gamma_0}$ als elementare symmetrische Function von s Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ dar. Daher genügt $\frac{\xi}{\gamma_0}$ einer Gleichung der Gestalt:

$$\left(\frac{\xi}{\gamma_0}\right)^m + \varphi_1\left(\frac{\xi}{\gamma_0}\right)^{m-1} + \varphi_2\left(\frac{\xi}{\gamma_0}\right)^{m-2} + \cdots + \varphi_m = 0,$$

deren Coefficienten φ_1, φ_2, ... φ_m ganze ganzzahlige Functionen 1sten, 2ten, ... m^{ten} Grades von $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$, $\frac{\gamma_2}{\gamma_0}$, ... $\frac{\gamma_{r+s}}{\gamma_0}$ sind. Die Multiplication mit γ_0^m ergiebt für ξ selber eine Gleichung der Gestalt

$$\xi^m + \psi_1\xi^{m-1} + \psi_2\xi^{m-2} + \cdots + \psi_m = 0,$$

deren Coefficienten ψ_1, ψ_2, ... ψ_m homogene ganze ganzzahlige Functionen 1sten, 2ten, ... m^{ten} Grades von γ_0, γ_1, ... γ_{r+s} sind. Diese Coefficienten sind daher ganze algebraische Zahlen, die der Reihe nach durch ω, ω^2, ... ω^m theilbar sind. Folglich genügt $\frac{\xi}{\omega}$ einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, nämlich der Gleichung

$$\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^m + \frac{\psi_1}{\omega}\cdot\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{m-1} + \frac{\psi_2}{\omega^2}\cdot\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{m-2} + \cdots + \frac{\psi_m}{\omega^m} = 0.$$

Folglich ist $\frac{\xi}{\omega}$ eine ganze algebraische Zahl.

Nachdem nunmehr gezeigt ist, daß die Zahlen

$$\alpha_0\beta_0,\ \alpha_0\beta_1,\ \alpha_0\beta_2,\ \ldots\ \alpha_0\beta_s$$

sämmtlich durch ω theibar sind, folgt, daß das Produkt der Function

$$\varphi(x) - \alpha_0 x^r = \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r$$

in die Function $\psi(x)$ lauter durch ω theilbare Coefficienten besitzt. Hieraus schließt man, daß

$$\alpha_1\beta_0,\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_1\beta_2,\ \ldots\ \alpha_1\beta_s$$

sämmtlich durch ω theilbar sind u.s.w.[1]).

---

1) Nachdem ich die vorliegende Arbeit bereits abgeschlossen hatte, fand ich

II.

Indem ich zu der Theorie der Ideale in einem algebraischen Zahlenkörper übergehe, stelle ich zunächst die nothwendigen Definitionen zusammen und knüpfe an dieselben einige Bemerkungen. Sind $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ ganze Zahlen des Körpers, so soll das Zeichen

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r)$$

das System der Zahlen bedeuten, die in der Form

$$\eta_0 \alpha_0 + \eta_1 \alpha_1 + \cdots + \eta_r \alpha_r$$

darstellbar sind, unter $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_r$ beliebige ganze Zahlen des Körpers verstanden[1]).

Definition 1. Ein jedes derartige System heißt ein „Ideal“[2]).

Definition 2. Wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale bezeichnen, so bedeutet die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ genau dieselben Zahlen umfaßt, wie das Ideal $\mathfrak{b}$.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß das Ideal $(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r)$ sich nicht ändert, wenn den Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ eine in dem Ideale enthaltene Zahl hinzugesetzt wird. Es ändert sich offenbar auch nicht, wenn von zwei einander gleichen der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ die eine unterdrückt wird.

Definition 3. Das Ideal (α), welches aus allen durch α theilbaren Zahlen des Körpers besteht, heißt ein „Hauptideal“.

Definition 4. Unter dem Produkte $\mathfrak{ab}$ zweier Ideale

$$\mathfrak{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r), \quad \mathfrak{b} = (\beta_0, \beta_1, \dots \beta_s)$$

versteht man das Ideal

$$(\alpha_0 \beta_0, \dots \alpha_0 \beta_s, \alpha_1 \beta_0, \dots \alpha_1 \beta_s, \dots \alpha_r \beta_0, \dots \alpha_r \beta_s).$$

---

in den „Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag (1892) eine Abhandlung von Herrn R. Dedekind „Ueber einen arithmetischen Satz von Gauss“, in welcher der Verfasser einen Satz beweist, der sich im wesentlichen mit dem obigen Satze deckt.

1) In dieser Bezeichnung schließe ich mich Herrn Hilbert an. (Vgl. dessen Abhandlung: Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale. Math. Annalen Bd. 44. p. 1—8.)

2) Diese Definition des Ideals ist für meine Darstellung die zweckmäßigste. Die Uebereinstimmung derselben mit der Dedekind'schen Definition ist leicht nachzuweisen. (Vgl. Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, Supplement XI.)

Das letztere besteht offenbar aus allen Zahlen, die in der Form $\alpha^{(1)}\beta^{(1)}+\alpha^{(2)}\beta^{(2)}+\cdots+\alpha^{(k)}\beta^{(k)}$ darstellbar sind, wo $\alpha^{(1)},\ldots\alpha^{(k)}$ Zahlen aus $\mathfrak{a}$ und $\beta^{(1)},\ldots\beta^{(k)}$ Zahlen aus $\mathfrak{b}$ bedeuten. Daher ist auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}'$ ist.

Definition 5. Das Ideal $\mathfrak{c}$ heißt durch das Ideal $\mathfrak{a}$ theilbar, wenn ein Ideal $\mathfrak{b}$ existirt, das der Gleichung $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ genügt.

Da stets $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(1)$ ist, so ist jedes Ideal durch sich selbst und durch das Hauptideal (1) theilbar.

Definition 6. Ein von (1) verschiedenes Ideal, welches nur durch sich selbst und durch (1) theilbar ist, heißt ein „Primideal".

Definition 7. Sind α, β, γ ganze Zahlen des Körpers, so heißen α und β congruent modulo γ, wenn $\alpha-\beta$ durch γ theilbar ist.

Bezeichnet a eine positive ganze rationale Zahl, und bilden $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers, so ist offenbar jede ganze Zahl des Körpers modulo a einer der Zahlen congruent, die aus $h_1\omega_1+h_2\omega_2+\cdots+h_n\omega_n$ entstehen, wenn $h_1, h_2, \ldots h_n$ unabhängig von einander die Zahlen $0, 1, 2, \ldots a-1$ durchlaufen. Gehört nun a dem Ideale $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r)$ an, so ändert sich dieses Ideal $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r)=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r, a)$ nicht, wenn jede der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ durch eine ihr modulo a congruente ersetzt wird. Hieraus schließt man sofort: Eine positive ganze rationale Zahl a gehört nur einer endlichen Anzahl von Idealen an.

III.

An die Spitze der Theorie der Ideale stelle ich nun den Satz: Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ läßt sich durch Multiplication mit einem geeignet gewählten Ideal $\mathfrak{b}$ zu einem Hauptideale machen.

Es sei $\mathfrak{a}=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r)$. Man bilde dann die Function

$$\varphi(x)=\alpha_0 x^r+\alpha_1 x^{r-1}+\cdots+\alpha_r$$

und bezeichnet mit

$$\psi(x)=\beta_0 x^s+\beta_1 x^{s-1}+\cdots+\beta_s$$

das Produkt der zu $\varphi(x)$ conjugirten Functionen, so daß

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)=\gamma_0 x^{r+s}+\cdots+\gamma_{r+s}$$

die Norm von $\varphi(x)$ ist. Die Coefficienten $\gamma_0, \ldots \gamma_{r+s}$ von $f(x)$ sind

gewöhnliche rationale ganze Zahlen, die Coefficienten $\beta_0, \ldots \beta_s$ von $\psi(x)$ sind ganze Zahlen des Körpers.

Bezeichnet nun $\mathfrak{b}$ das Ideal $(\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_s)$, so ist leicht zu zeigen, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Hauptideal (a) ist, wo a den größten gemeinsamen Theiler der Zahlen $\gamma_0, \ldots \gamma_{r+s}$ bedeutet. In der That ist nach dem Satze von No. I jede Zahl des Ideales $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch a theilbar. Da ferner die Zahl a darstellbar ist in der Form

$$a = t_0\gamma_0 + t_1\gamma_1 + \cdots + t_{r+s}\gamma_{r+s} = t_0\alpha_0\beta_0 + t_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) + \cdots,$$

wo $t_0, t_1, \ldots t_{r+s}$ ganze rationale Zahlen bezeichnen, so ist jede durch a theilbare Zahl des Körpers auch eine Zahl des Ideales $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Dieses umfaßt also alle und nur die durch a theilbaren Zahlen, ist also nichts Anderes, wie das Hauptideal (a).

IV.

Es bietet nun keine Schwierigkeit mehr, die Gesetze der Theilbarkeit im Gebiete der Ideale festzustellen. Sie sind in den folgenden Sätzen enthalten:

1. Aus der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ folgt nothwendig $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.

Man bestimme das Ideal $\mathfrak{b}$ wie in No. III. Dann ist $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ oder $(a)\mathfrak{a}_1 = (a)\mathfrak{a}_2$. Aus der letzteren Gleichung schließt man leicht, daß $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die nämlichen Zahlen umfassen, d. h. $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.

2. Für die Theilbarkeit des Ideales $\mathfrak{c}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ ist nothwendig und hinreichend, daß alle Zahlen von $\mathfrak{c}$ auch dem Ideale $\mathfrak{a}$ angehören.

Ist $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar, also $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, so gehört offenbar jede Zahl von $\mathfrak{c}$ auch dem Ideale $\mathfrak{a}$ an. Umgekehrt: Gehören die Zahlen von $\mathfrak{c}$ dem Ideale $\mathfrak{a}$ an, so gehören die Zahlen von $\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ dem Hauptideale $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a)$ an. Folglich ist $\mathfrak{c}\mathfrak{b} = (a)\mathfrak{a}_1$, wo $\mathfrak{a}_1$ dasjenige Ideal ist, welches aus allen durch a dividirten Zahlen von $\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ besteht. Die Gleichung $\mathfrak{c}\mathfrak{b} = (a)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ zieht aber nach 1. $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ nach sich.

3. Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = (1)$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 = (1)$.

Denn nach 2. ist das Hauptideal (1) nur durch sich selbst theilbar.

4. Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ hat nur eine endliche Zahl von Theilern.

Sei wie oben $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a)$, so gehört die positive ganze rationale

Zahl a jedem Ideale an, das in $\mathfrak{a}$ aufgeht. Es giebt aber (nach No. II) nur eine endliche Anzahl von Idealen, denen a angehört.

5. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ nicht das Hauptideal (1), so hat das Ideal $\mathfrak{a}_1$ eine geringere Anzahl von Theilern, wie das Ideal $\mathfrak{a}$.

Denn sind $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_k$ die Theiler von $\mathfrak{a}_1$, so hat das Ideal $\mathfrak{a}$ sicher die Theiler

$$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_k \text{ und } \mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_2, \mathfrak{d}_2 \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{d}_k \mathfrak{a}_2.$$

Die letzten k Theiler sind unter einander verschieden und müßten also, falls $\mathfrak{a}$ nicht mehr Theiler als $\mathfrak{a}_1$ hätte, abgesehen von der Reihenfolge mit den ersten k Theilern übereinstimmen.

Folglich wäre $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{d}_2 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{d}_k \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_k$, folglich $\mathfrak{a}_2^k = 1$, folglich $\mathfrak{a}_2 = 1$, entgegen der Voraussetzung.

6. Wenn das Primideal $\mathfrak{p}$ in dem Produkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ aufgeht, so geht $\mathfrak{p}$ entweder in $\mathfrak{a}_1$ oder in $\mathfrak{a}_2$ auf.

Angenommen $\mathfrak{p} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ gehe in $\mathfrak{a}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ nicht auf. Dann ist das Ideal $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \pi_1, \pi_2, \ldots) = (1)$, da dasselbe gleichzeitig in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{p}$ aufgeht. Folglich giebt es eine Zahl α in $\mathfrak{a}_1$ und eine Zahl π in $\mathfrak{p}$, welche der Gleichung $\alpha + \pi = 1$ genügen. Jede Zahl $\omega = \omega\alpha + \omega\pi$ von $\mathfrak{a}_2$ gehört daher dem Ideale $\mathfrak{p}$ an. Also ist $\mathfrak{a}_2$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar.

7. Jedes von (1) verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ läßt sich und zwar nur auf eine Weise in der Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r$$

darstellen, wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ Primideale bezeichnen.

Ist $\mathfrak{a}$ nicht selbst Primideal, so besitzt $\mathfrak{a}$ einen von (1) und $\mathfrak{a}$ verschiedenen Theiler $\mathfrak{a}_1$, und es ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, wo auch $\mathfrak{a}_2$ von (1) und $\mathfrak{a}$ verschieden ist. Nach 5. ist die Anzahl der Theiler von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ geringer als die Anzahl der Theiler von $\mathfrak{a}$. Falls eines der Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ nicht Primideal ist, läßt es sich in derselben Weise wie $\mathfrak{a}$ zerlegen u. s. f. Da nun die Anzahl der Theiler der neu auftretenden Ideale sich immerfort verringert, so bricht das Verfahren ab und führt schließlich auf die Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch ein Produkt von lauter Primidealen. Ist nun gleichzeitig $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$, wo die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sämmtlich Primideale sind, so muß (nach 6.) $\mathfrak{p}_1$ in einem der Ideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$ aufgehen, also gleich einem dieser Ideale, etwa $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$ sein. Aus $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$ folgt dann (nach 1.) $\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$.

Durch Wiederholung dieser Schlüsse ergiebt sich die Identität der beiden Zerlegungen von $\mathfrak{a}$.

V.

An den Satz von No. I schließe ich hier noch einige Folgerungen an, die zu Kroneckers[1]) Theorie der Formen mit ganzzahlig algebraischen Coefficienten hinleiten.

Sind $\varphi, \psi, \ldots$ ganze rationale Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_k$, so gehen dieselben durch die Substitution $x_1 = x^{t_1}$, $x_2 = x^{t_2}, \ldots x_k = x^{t_k}$, wo $t_1, t_2, \ldots t_k$ positive ganze Zahlen bezeichnen, in ganze Functionen $\Phi, \Psi, \ldots$ der Variabeln x über. Man zeigt nun leicht, daß die Exponenten $t_1, t_2, \ldots t_k$ sich stets so bestimmen lassen, daß die Anzahl der Glieder, aus denen sich $\varphi, \psi, \ldots$ bezüglich zusammensetzen, dieselbe ist, wie die Anzahl der Glieder aus denen sich $\Phi, \Psi, \ldots$ bezüglich zusammensetzen, so daß die Function φ genau dieselben Coefficienten besitzt, wie Φ, die Function ψ genau dieselben Coefficienten, wie Ψ u. s. f. Verbindet man diese Bemerkung mit dem Satze von No. I, so sieht man, daß sich derselbe folgendermaßen verallgemeinern läßt:

Sind φ und ψ ganze rationale Functionen von beliebig vielen Variabeln mit ganzzahlig algebraischen Coefficienten, und ist jeder Coefficient des Produktes $\varphi \cdot \psi$ durch die ganze algebraische Zahl ω theilbar, so theilt ω auch jedes aus einem Coefficienten von φ und einem Coefficienten von ψ gebildete Produkt.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergiebt sich die weitere Verallgemeinerung:

Sind $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ ganze rationale Functionen von beliebig vielen Variabeln mit ganzzahlig algebraischen Coefficienten, und ist jeder Coefficient des Produktes $\varphi\psi\chi\ldots$ durch die ganze algebraische Zahl ω theilbar, so theilt ω auch jedes aus je einem Coefficienten von $\varphi, \psi, \chi \ldots$ gebildete Produkt.

Es seien jetzt φ_1 und φ_2 ganze rationale Functionen von beliebig vielen Variabeln, deren Coefficienten $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots$ bezüglich $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots$ ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers sind. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Coefficienten des Produktes $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$. Dann gilt der Satz:

---

1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Crelle Bd. 92.

Das Produkt aus den Idealen

$$\mathfrak{a}_1 = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots) \text{ und } \mathfrak{a}_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots)$$

ist gleich dem Ideale

$$\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

In der That, sei ψ das Produkt der zu φ conjugirten Functionen, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Coefficienten von ψ. Dann hat man

$$\varphi\psi = \varphi_1 \varphi_2 \psi = \Phi,$$

wo Φ die Norm von φ ist. Wenn nun a den größten gemeinsamen Theiler der Coefficienten von Φ, die gewöhnliche rationale ganze Zahlen sind, bezeichnet, so schließt man aus den soeben bewiesenen Sätzen sofort, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a) \text{ und } \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b} = (a)$$

ist, wo $\mathfrak{b}$ das Ideal $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ bedeutet. Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}$ folgt aber $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, was zu beweisen war.

Auf Grund des letzten Satzes ist es leicht, die Sätze Kroneckers über Formen mit ganzzahlig algebraischen Coefficienten zu beweisen.

Zürich, den 27. September 1894.

Ueber die Zahlencoefficienten in den Weierstraß'schen σ-Reihen.

Von

Robert Haussner in Würzburg.

Vorgelegt von Ernst Schering in der Sitzung vom 24. November 1894.

Die von Herrn Weierstraß in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführten Functionen σu und $\sigma_\lambda u$, $\lambda = 1, 2, 3$, lassen sich bekanntlich durch Reihen darstellen, welche nach Potenzen der Variabeln u mit ganzzahligen positiven Exponenten fortschreiten und für alle endlichen Werte von u convergiren. Diese Reihenentwicklungen, welche Herr Weierstraß mit Hilfe der für die σ-Functionen geltenden partiellen Differentialgleichungen abgeleitet hat[1]), sind die folgenden:

$$\text{(I.)} \quad \sigma u = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \left(\frac{g_2}{2}\right)^{\mathfrak{m}} \left(2g_3\right)^{\mathfrak{n}} \frac{u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}}{(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1)!},$$

$$\text{(II.)} \quad \sigma u = e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} (3e_\lambda)^{\mathfrak{m}} (2\varepsilon_\lambda)^{\mathfrak{n}} \frac{u^{2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}+1}}{(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}+1)!}, \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

$$\text{(III.)} \quad \sigma_\lambda u = e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} (12e_\lambda)^{\mathfrak{m}} (2\varepsilon_\lambda)^{\mathfrak{n}} \frac{u^{2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}}}{(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n})!}, \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n} = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots \infty)$$

wo g_2 und g_3 die zu der Function σu gehörenden Invarianten bezeichnen, wo ferner

$$\begin{aligned} e_\lambda^3 &= \tfrac{1}{4} g_2 e_\lambda + \tfrac{1}{4} g_3, \\ 2\varepsilon_\lambda &= 6e_\lambda^2 - \tfrac{1}{2} g_2 \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

---

1) K. Weierstraß, Zur Theorie der elliptischen Functionen. Sitz.-Ber. der Königl. Preuss. Akademie d. Wiss. zu Berlin, Jahrgang 1882, S. 243—251.

ist[1]) und die Coefficienten $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$ ganze Zahlen sind, für welche die folgenden Recursionsformeln bestehn:

(1.) $$a_{m,n} =$$
$$3(m+1)\,a_{m+1,n-1}+\tfrac{16}{3}(n+1)\,a_{m-2,n+1}-\tfrac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)\,a_{m-1,n};$$

(2.) $$b_{m,n} =$$
$$4(m+1)\,b_{m+1,n-1}+(4n+1)\,b_{m-1,n}-(m+2n-1)(2m+4n-1)\,b_{m,n-1},$$

(3.) $$c_{m,n} =$$
$$16(m+1)\,c_{m+1,n-1}+n c_{m-1,n}-(m+2n-1)(2m+4n-3)\,c_{m,n-1}.$$

In diesen Recursionsformeln ist jeder Coefficient a, b, c gleich Null zu setzen, bei welchem einer der beiden Indices einen negativen Wert erhält, und den Coefficienten $a_{0,0}$, $b_{0,0}$, $c_{0,0}$ ist der Wert 1 beizulegen.

Es entsteht nun die Frage, wie sich die Coefficienten $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$ independent darstellen lassen. Eine solche independente Darstellung ergiebt sich aber auf sehr einfache Weise mit Hilfe der linearen Recursionsformeln (1) bis (3). Wenn auch das Verfahren, welches zum Ziele führt, für die drei Arten von Coefficienten das gleiche ist, so ist es doch nötig, die Bestimmung der Coefficienten $a_{m,n}$ von derjenigen der Coefficienten $b_{m,n}$ und $c_{m,n}$ getrennt durchzuführen.

I.

Faßt man alle Coefficienten $a_{m,n}$, welche zu derselben Potenz u^{2r+1} der Variabeln u gehören, zu einer Gruppe zusammen, welche als die Gruppe (r) bezeichnet werden mag, so müssen die Indices m, n der zu dieser Gruppe gehörenden Coefficienten die Bedingung erfüllen:

$$2m+3n = r.$$

Es ist nun zunächst zu untersuchen, welche Zahlenpaare m, n diese Gleichung erfüllen, wenn r irgend eine positive ganze Zahl, die Null eingeschlossen ist, und wieviele solche Zahlenpaare die

---

1) In Betreff der gebrauchten Bezeichnungen verweise ich noch auf die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstraß bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz“, 2te Ausgabe (Berlin, Springer, 1894). Die Formeln (I) und (1) finden sich dort als Formeln (8) u. (9) auf S. 6 und 7.

Gruppe ($\mathfrak{r}$) umfaßt. Dazu muß man die sämmtlichen positiven ganzen Zahlen in die 6 Klassen teilen:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \mathfrak{r} = 6h\ , & 3)\ \mathfrak{r} = 6h+2, & 5)\ \mathfrak{r} = 6h+4, \\ 2)\ \mathfrak{r} = 6h+1, & 4)\ \mathfrak{r} = 6h+3, & 6)\ \mathfrak{r} = 6h+5. \end{array} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die geraden Zahlen, also die Zahlen der Klassen 1), 3) und 5), kann man auch unter der gemeinsamen Form:

$$\mathfrak{r} = 2[3h+\delta] \qquad (\delta = 0, 1, 2)$$

vereinigen, und man erkennt sofort, daß diese Gruppen ($\mathfrak{r}$) nur die folgenden Zahlenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ umfassen können:

$$\mathfrak{m} = 3(h-\varkappa)+\delta, \qquad \mathfrak{n} = 2\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, h).$$

Die Gruppen ($\mathfrak{r} = 2[3h+\delta]$) enthalten daher je $(h+1)$ solcher Zahlenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ oder, was dasselbe ist, $(h+1)$ Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$.

Für die ungeraden Zahlen, also für die Zahlen der Klassen 2), 4) und 6), welche auch unten der Form:

$$\mathfrak{r} = 2[3h+\delta]+1 \qquad (\delta = 0, 1, 2)$$

zusammengefaßt werden können, müssen die Zahlenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Form haben:

$$\mathfrak{m} = 3(h-\varkappa)+\delta-1, \qquad \mathfrak{n} = 2\varkappa+1.$$

Hier muß aber die Klasse 2) von den Klassen 4) und 6) abgetrennt werden. Da $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ keine negativen Zahlen sein können, so darf für $\delta = 0$ (Klasse 2) $\varkappa$ nur von 0 bis $(h-1)$ laufen, während für $\delta = 1$ und $\delta = 2$ (Klassen 4 und 6) $\varkappa$ von 0 bis h läuft. In dem ersten Falle hat man also h, in den beiden letzten Fällen $(h+1)$ Zahlenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; die betreffenden Gruppen ($\mathfrak{r}$) enthalten mithin h, bez. $(h+1)$ Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$.

Bezeichnet nun $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ein bestimmtes Indicespaar aus der Gruppe ($\mathfrak{r}$), so soll der Coefficient $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ independent bestimmt werden. Mit $a_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, wo für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ alle Zahlenpaare zu setzen sind, welche den Gleichungen:

$$2\mathfrak{p}+3\mathfrak{q} = \varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{r}-1)$$

genügen, mögen die Coefficienten der Gruppen (0) bis ($\mathfrak{r}-1$) bezeichnet werden. Die sämmtlichen Indicespaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sollen jetzt nach Gruppen geordnet werden, sodaß auf die sämmtlichen Indices-

paare einer Gruppe die der nächst höheren folgen. Innerhalb jeder Gruppe aber sollen die Indicespaare so angeordnet werden, daß der zweite Index, $\mathfrak{q}$, von dem niedrigsten bis zu dem höchsten Werte ansteigt. Fügt man an das Ende der so gebildeten Reihe von Indicespaaren noch das eine Indicespaar $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der Gruppe $(\mathfrak{r})$ an, so soll dann diese, in der angegebenen Art geordnete, Reihe von Indicespaaren die zu dem Indicespaar $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörende Indicesreihe heißen.

Beachtet man nun, daß in der Recursionsformel (1) für $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ aus der Gruppe $(\mathfrak{r})$ die auf der rechten Seite stehenden Coefficienten zu den beiden vorhergehenden Gruppen [$a_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1}$ und $a_{\mathfrak{m}-2,\mathfrak{n}+1}$ zur Gruppe $(\mathfrak{r}-1)$, $a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}$ zur Gruppe $(\mathfrak{r}-2)$] gehören, so ist sofort ersichtlich, daß diese Recursionsformel für $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\text{(1a)} \qquad \sum_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} A_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} a_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = 0,$$

wo die Summation über alle Zahlenpaare der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe in der angegebenen Ordnung zu erstrecken ist. Durch Vergleich mit der Recursionsformel (1) ergeben sich für die Größen $A_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ die Werte:

$$\text{(1b)} \qquad \begin{aligned} A_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} &= 1 \text{ für } \mathfrak{p} = \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{n}, \\ &= -3(\mathfrak{m}+1) \;\text{„}\; \mathfrak{p} = \mathfrak{m}+1, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{n}-1, \\ &= -\tfrac{16}{3}(\mathfrak{n}+1) \;\text{„}\; \mathfrak{p} = \mathfrak{m}-2, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{n}+1, \\ &= \tfrac{1}{3}(2\mathfrak{m}+3\mathfrak{n}-1)(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}-1) \;\text{„}\; \mathfrak{p} = \mathfrak{m}-1, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{n}, \\ &= 0 \;\text{„ alle übrigen Wertepaare }\; \mathfrak{p},\ \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Die Recursionsformel (1a) und die zugehörigen Definitionen (1b) gelten nun mit Ausnahme von $a_{0,0}$ für jeden beliebigen Coefficienten $a_{\mu,\nu}$, dessen Indices in der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe vorkommen, wenn man nur $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ durch μ, ν ersetzt. Man bilde sich nun das folgende Gleichungensystem:

$$a_{0,0} = 1,$$

$$\sum_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} A_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} a_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = 0,$$

wo μ, ν alle Zahlenpaare der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe, mit Ausnahme des ersten (0, 0), in der vorgeschriebenen Ordnung durchlaufen soll. Dann hat man ein System von ebensovielen Gleichungen als in ihnen Coefficienten a linear als Unbekannte

auftreten, und man erhält daher $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ independent durch den Quotienten zweier Determinanten dargestellt: $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = \frac{Z^{(a)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}}{D^{(a)}}$.

Die Gleichungen sollen nun so geschrieben werden, daß die mit gleichen Indices versehenen Coefficienten a senkrecht übereinander zu stehn kommen. Jede Vertikalreihe möge als Marke das Indicespaar $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ des in ihr stehenden Coefficienten $a_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ bekommen; jeder Gleichung möge als Marke das betreffende Indicespaar μ, ν vorgesetzt werden.

Bildet man dann die Determinante $D^{(a)}$ des vorstehenden Gleichungensystems und gibt man den Zeilen dieser Determinante die Marken der Gleichungen, den Colonnen die Marken der vertikalen Reihen der Gleichungen, so ist das der Zeile μ, ν und der Colonne $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ angehörende Element $A^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}_{\mu,\nu}$. Da nun die sämmtlichen Elemente $A^{\mu,\nu}_{\mu,\nu} = 1$ und alle Elemente $A^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}_{\mu,\nu}$, welche oberhalb der Hauptdiagonale stehen, gleich Null sind, so hat die Determinante $D^{(a)}$ den Wert A. Es ist also $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ direct gleich der Zählerdeterminante $Z^{(a)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$.

Um die Zählerdeterminante $Z^{(a)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ zu erhalten, hat man in der Determinante $D^{(a)}$ die Elemente der letzten Colonne, welche die Marke $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ trägt, durch die auf den rechten Seiten der Gleichungen stehenden Constanten zu ersetzen, was hier darauf hinauskommt, daß 1 an Stelle des ersten Elementes, 0 an Stelle des letzten Elementes der Colonne $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ tritt. Mit Benutzung der von Kronecker eingeführten Bezeichnungsweise einer Determinante ist daher:

$$(1^*.) \qquad a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = \left| A^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}_{\mu,\nu} \right|,$$

wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ einerseits und μ, ν andrerseits alle Zahlenpaare der zu $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe durchlaufen. Die Werte der einzelnen Elemente $A^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}_{\mu,\nu}$ sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

$$\text{A.)} \left\{ \begin{array}{lll} A^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}_{\mu,\nu} = 1 & \text{für } \mathfrak{p} = \mu \quad, \mathfrak{q} = \nu \quad, & \\ \quad = -3\,(\mu+1) & \text{„ } \mathfrak{p} = \mu+1,\ \mathfrak{q} = \nu-1, & \text{Für } \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \text{ ist das Zahlen-} \\ \quad = -\frac{16}{3}(\nu+1) & \text{„ } \mathfrak{p} = \mu-2,\ \mathfrak{q} = \nu+1, & \text{paar } \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \text{ auszu-} \\ \quad = \frac{1}{3}\,(2\mu+3\nu-1)(4\mu+6\nu-1) & \text{„ } \mathfrak{p} = \mu-1,\ \mathfrak{q} = \nu \quad, & \text{schließen.} \\ \quad = 0 \text{ für alle übrigen Wertepaare } \mathfrak{p}, \mathfrak{q}; & & \\ A^{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}_{0,0} = 1 & & \\ A^{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}_{\mu,\nu} = 0 \text{ für alle Wertepaare } \mu, \nu \text{ mit Ausnahme des ersten } (0, 0). & & \end{array} \right.$$

Für die verschiedenen Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, welche zu derselben Gruppe ($\mathfrak{r}$) gehören, ist, wie sofort ersichtlich, der Grad der zugehörigen Determinanten $\left|A_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right|$ derselbe, und es unterscheiden sich dieselben nur in den Elementen der letzten Zeile.

Es ist noch der Grad der für $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ erhaltenen Determinante zu bestimmen. Dieser ist gleich der Anzahl der Wertepaare μ, ν, welche in der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe enthalten sind. Diese Anzahl ist eine verschiedene je nach der Zahlenklasse, welcher $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{m} + 3\mathfrak{n}$ angehört.

Zunächst sei $\mathfrak{r} = 6h$. Dann lassen sich die sämmtlichen Gruppen (0), (1), (2), . . ., ($\mathfrak{r} - 1$) in die sechs Reihen ordnen:

$$6 \cdot 0 + \delta, \quad 6 \cdot 1 + \delta, \ldots, \quad 6(h-1) + \delta, \quad (\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5.)$$

Zur Gruppe ($6\sigma + \delta$) gehören, wie früher gezeigt ist, ($\sigma + 1$) Zahlenpaare μ, ν, wenn $\delta \neq 1$ ist, und σ Zahlenpaare μ, ν, wenn $\delta = 1$ ist. Die sämmtlichen Gruppen (0), (1), . . . ($\mathfrak{r} - 1$) enthalten daher insgesammt:

$$\sum_{\sigma = 0}^{\sigma = h-1} \{5(\sigma + 1) + \sigma\} = 3h^2 + 2h$$

Zahlenpaare μ, ν. Dazu kommt noch das eine zur Gruppe ($\mathfrak{r}$) gehörende Zahlenpaar $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ des zu bestimmenden Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, sodaß also in der Reihe 0, 0 bis $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ einschließlich $(3h^2 + 2h + 1)$ Indicespaare enthalten sind.

Ist $\mathfrak{r} = 6h + 1$, so kommen noch $(h + 1)$ Indicespaare der Gruppe ($6h$) hinzu, sodaß sich die Gesammtzahl der in der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe enthaltenen Paare auf $3h^2 + 3h + 2$ erhöht.

Für $\mathfrak{r} = 6h + 2$ treten noch h Indicespaare der Gruppe $(6h + 1)$ hinzu und die Gesammtzahl wird daher: $3h^2 + 4h + 2$.

Ist schließlich $\mathfrak{r} = 6h + 2 + \varepsilon$, $\varepsilon = 1, 2, 3$, so erhöht sich die Gesammtzahl auf $3h^2 + 4h + 2 + \varepsilon(h + 1)$, wie sofort ersichtlich ist.

Für den Grad der $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ bestimmenden Determinante erhält man daher folgende Tabelle:

$2\mathfrak{m} + 3\mathfrak{n}$	Grad von $\left\|A_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right\|$
$6h$	$3h^2 + 2h + 1$
$6h + 1$	$3h^2 + 3h + 2$
$6h + 2$	$3h^2 + 4h + 2$
$6h + 3$	$3h^2 + 5h + 3$
$6h + 4$	$3h^2 + 6h + 4$
$6h + 5$	$3h^2 + 7h + 5$.

Dieser Grad läßt sich sofort um 2 Einheiten erniedrigen, wenn man beachtet, daß nur das erste Element der letzten Colonne von Null verschieden ist, und daß in der resultirenden Determinante die sämmtlichen Elemente der ersten Colonne, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

Zur Verdeutlichung des Vorhergehenden sei es gestattet ein Zahlenbeispiel hier anzufügen. Es werde $\mathfrak{r} = 8 = 6 \cdot 1 + 2$, also $h = 1$ gewählt. Zur Gruppe ($\mathfrak{r} = 8$) gehören die Indicespaare $\mathfrak{m} = 4$, $\mathfrak{n} = 0$ und $\mathfrak{m} = 1$, $\mathfrak{n} = 2$. Folglich können $a_{4,0}$ und $a_{1,2}$ independent durch Determinanten vom Grade 9 dargestellt werden. Die zu 4, 0 resp. zu 1, 2 gehörende Indicesreihe ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} [\text{Gruppe}: (0) & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8)\;] \\ 0,0; & -; & 1,0; & 0,1; & 2,0; & 1,1; & \overbrace{3,0,\;0,2}; & 2,1; & \overbrace{4,0 \text{ resp. } 1,2} \end{array}$$

Folglich ist:

$$a_{4,0} \; (\text{resp. } a_{1,2}) = \left|\begin{array}{ccccccccc} 0,0 & 1,0 & 0,1 & 2,0 & 1,1 & 3,0 & 0,2 & 2,1 & 4,0 \; (\text{resp. } 1,2) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -\frac{16}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{3} & -\frac{16}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & -9 & -\frac{32}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ & & & & & (0) & (35) & (-6) & \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \text{Marke.} \\ \hline 0,0 \\ 1,0 \\ 0,1 \\ 2,0 \\ 1,1 \\ 3,0 \\ 0,2 \\ 2,1 \\ 4,0 \\ \binom{\text{resp.}}{1,2} \end{array}$$

Um $a_{4,0}$ zu erhalten, sind in der letzten Zeile die oberen Zahlen zu nehmen, um $a_{1,2}$ zu erhalten, dagegen die unteren (eingeklammerten).

Berechnet man diese beiden Determinanten, so findet man:

$$a_{4,0} = 321, \qquad a_{1,2} = 4968,$$

welche Werte mit den von Herrn H. A. Schwarz[1]) auf recurrentem Wege berechneten übereinstimmen.

---

1) H. A. Schwarz, Formeln u. Lehrsätze etc. S. 7.

II.

Für die Bestimmung der Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ und $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ der Reihenentwicklungen (II) und (III) hat man ebenfalls alle Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, resp. $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, welche zu derselben Potenz $u^{2\mathfrak{r}+1}$, resp. $u^{2\mathfrak{r}}$ der Variabeln u gehören, zu einer Gruppe ($\mathfrak{r}$) zusammenzufassen. Die Indices $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der zur Gruppe ($\mathfrak{r}$) gehörenden Coefficienten müssen der Bedingungsgleichung genügen:

$$\mathfrak{m}+2\mathfrak{n} = \mathfrak{r}.$$

Da man hier nur zu unterscheiden hat, ob $\mathfrak{r}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, so gestaltet sich diese Untersuchung weit einfacher als die im ersten Abschnitte durchgeführte.

Ist $\mathfrak{r} = 2h$ ($h = 0, 1, 2, \ldots$), so können $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nur die Werte:

$$\mathfrak{m} = 2(h-\varkappa), \qquad \mathfrak{n} = \varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, h)$$

haben; ist dagegen $\mathfrak{r} = 2h+1$ ($h = 0, 1, 2, \ldots$), so sind für $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ nur die Zahlenpaare:

$$\mathfrak{m} = 2(h-\varkappa)+1, \qquad \mathfrak{n} = \varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, h)$$

zulässig. Sowohl die Gruppe ($2h$), als auch die Gruppe ($2h+1$) umfaßt daher ($h+1$) Coefficienten.

Es soll jetzt wieder mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ein bestimmtes Indicespaar aus der Gruppe ($\mathfrak{r}$) bezeichnet und die Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ und $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ independent bestimmt werden. Mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sollen alle Indicespaare der Gruppen (0) bis ($\mathfrak{r}-1$) bezeichnet werden, sodaß also für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ alle Wertepaare zu setzen sind, welche den Gleichungen:

$$\mathfrak{p}+2\mathfrak{q} = \varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{r}-1)$$

genügen. Diese sämmtlichen Indicespaare sollen in derselben Weise geordnet werden, wie es im ersten Abschnitte angegeben ist, und an das Ende dieser Reihe soll das eine Indicespaar $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der Gruppe ($\mathfrak{r}$) angefügt werden. Diese Reihe mag wieder als die zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörende Indicesreihe bezeichnet werden.

Beachtet man nun, daß in den Recursionsformeln (2) und (3) die auf den rechten Seiten derselben stehenden Coefficienten b und c zu den Gruppen ($\mathfrak{r}-1$) und ($\mathfrak{r}-2$) gehören, wenn die zu bestimmenden Coefficienten auf den linken Seiten zur Gruppe ($\mathfrak{r}$) gehören, so kann man diesen Recursionsformeln auch die Gestalt geben:

(2a.) $$\sum_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} B_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}\, b_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} = 0,$$

(3a.) $$\sum_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} C_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}\, c_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} = 0,$$

wobei die Summationen über alle Wertepaare der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe mit 0, 0 beginnend bis $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ in der angegebenen Ordnung zu erstrecken sind. Durch Vergleichung mit den Recursionsformeln (2) und (3) erhält man für die Größen $B_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}$ und $C_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}$ die folgenden Werte:

(2b, 3b)

$B_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}$	$C_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}$	
1	1	für $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$
$-4(\mathfrak{m}+1)$	$-16(\mathfrak{m}+1)$	„ $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}+1$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}-1$,
$-(4\mathfrak{n}+1)$	$-\mathfrak{n}$	„ $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}-1$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$,
$(\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}-1)$	$(\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}-3)$	„ $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}-1$,
0	0	„ alle übrigen Wertepaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$.

Ist μ, ν irgend ein Indicespaar aus der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe, 0, 0 ausgeschlossen, so gelten die vorstehenden Formeln auch, wenn nur überall μ, ν an Stelle von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gesetzt wird. In den Gleichungensystemen:

$$b_{0,0} = 1, \qquad\qquad c_{0,0} = 1,$$
$$\sum_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} B_{\mu,\,\nu}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}\, b_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} = 0; \qquad \sum_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} C_{\mu,\,\nu}^{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}}\, c_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{q}} = 0,$$

wo μ, ν alle Zahlenpaare der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe, mit Ausnahme von 0, 0, in der vorgeschriebenen Ordnung durchlaufen soll, hat man ebensoviele Gleichungen, als in ihnen Coefficienten b, resp. c linear vorkommen. $b_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ und $c_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ ergeben sich daher independent dargestellt durch den Quotienten zweier Determinanten:

$$b_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}} = \frac{Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{(b)}}{D^{(b)}}, \qquad c_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}} = \frac{Z_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}^{(c)}}{D^{(c)}}.$$

Die Gleichungen denke man sich so übereinandergeschrieben, daß die mit gleichen Indices versehenen Coefficienten b, resp. c in derselben Vertikalreihe stehen, welche mit diesem Indicespaar als Marke versehen werden soll. Jede Gleichung bekomme als Marke das betreffende Indicespaar μ, ν.

Bildet man nun die Determinanten $D^{(b)}$ und $D^{(c)}$ der vorstehenden Gleichungensysteme und gibt man den Zeilen dieser Determinanten die Marken der Gleichungen, den Colonnen die Marken der vertikalen Reihen der Gleichungen, so ist das der Zeile μ, ν und der Colonne $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ angehörende Element $B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ in der Determinante $D^{(b)}$ und $C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ in der Determinante $D^{(c)}$. In diesen Determinanten sind sämmtliche Elemente der Hauptdiagonale $B_{\mu,\nu}^{\mu,\nu}$, resp. $C_{\mu,\nu}^{\mu,\nu}$ gleich 1 und sämmtliche Elemente $B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ resp. $C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ oberhalb der Hauptdiagonale gleich Null; folglich haben beide Determinanten den Wert 1, und $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ und $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ sind gleich den Zählerdeterminanten.

Um die Determinanten $Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{(b)}$ und $Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{(c)}$ zu erhalten, hat man in den Determinanten $D^{(b)}$ und $D^{(c)}$ an Stelle des ersten Elementes der letzten Colonne $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ 1 und an Stelle des letzten Elementes 0 zu setzen. Man erhält also:

(2*.) $$b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = \left| B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right|$$

und

(3*.) $$c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = \left| C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right|,$$

wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sowohl als μ, ν alle Zahlenpaare der zu $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe durchlaufen. Die folgende Tabelle liefert die Werte der einzelnen Elemente $B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ und $C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$:

	$B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$	$C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$		
	1	1	für $\mathfrak{p} = \mu$, $\mathfrak{q} = \nu$	Für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ist das Zahlenpaa m, n aus zuschließe
	$-4(\mu+1)$	$-16(\mu+1)$	„ $\mathfrak{p} = \mu+1$, $\mathfrak{q} = \nu-1$	
	$-(4\nu+1)$	$-\nu$	„ $\mathfrak{p} = \mu-1$, $\mathfrak{q} = \nu$	
(B.)	$(\mu+2\nu-1)(2\mu+4\nu-1)$	$(\mu+2\nu-1)(2\mu+4\nu-3)$	„ $\mathfrak{p} = \mu$, $\mathfrak{q} = \nu-1$	
	0	0	„ alle übrigen Wertepaare $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$	
	1	1	„ $\mu = 0, \nu = 0$	und $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$ $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$.
	0	0	„ alle übrigen Wertepaare μ, ν	

Für die verschiedenen Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, resp. $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, welche zu derselben Gruppe $(\mathfrak{r})$ gehören, ist der Grad der zugehörigen Determinante $\left| B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right|$, resp. $\left| C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right|$ der gleiche, und diese letzteren selbst unterscheiden sich nur in den Elementen der letzten Zeile.

Ist $\mathfrak{n} = 0$, $\mathfrak{m} > 0$, so sind in der Determinante $\left| C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right|$ sämmt-

liche Elemente der letzten Zeile gleich Null, wie sich aus der Tabelle (B) ergibt, und folglich ist:

$$c_{\mathfrak{m},0} = 0 \text{ für } \mathfrak{m} > 0,$$

wie auch direct aus der Recursionsformel (3) gefolgert werden kann.

Der Grad der Determinanten $\left|B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right|$ und $\left|C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right|$ ist gleich der Anzahl der Zahlenpaare welche in der zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörenden Indicesreihe enthalten sind. Ist $\mathfrak{r} = 2h$, so lassen sich die Gruppen (0), (1), (2), ..., $(\mathfrak{r}-1)$ in die zwei Reihen ordnen:

$$2\cdot 0+\delta,\ 2\cdot 1+\delta,\ 2\cdot 2+\delta,\ \ldots,\ 2(h-1)+\delta. \quad (\delta = 0, 1)$$

Zur Gruppe $(2\sigma+\delta)$ gehören, wie im Anfange dieses Abschnittes gezeigt ist, $(\sigma+1)$ Zahlenpaare μ, ν. Die sämmtichen Gruppen (0) bis $(\mathfrak{r}-1)$ enthalten also insgesammt:

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=h-1} 2(\sigma+1) = h(h+1)$$

Zahlenpaare μ, ν. Zu dieser Zahl kommt noch das eine zur Gruppe $(\mathfrak{r})$ gehörende Indicespaar des zu bestimmenden Coefficienten. Die zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gehörende Indicesreihe enthält mithin $h(h+1)+1$ Paare μ, ν, wenn $\mathfrak{r} = 2h$ ist. Ist $\mathfrak{r} = 2h+1$, so kommen zu dieser Zahl noch $(h+1)$ Paare der Gruppe $(2h)$. Folglich ist für

$\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}$	der Grad von $\left|B_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right|$ und $\left|C_{\mu,\nu}^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\right|$
$2h$	$h(h+1)+1$
$2h+1$	$(h+1)^2+1.$

Da nur das erste Element der letzten Colonne von Null verschieden ist, so läßt sich der Grad der Determinanten sofort um eine Einheit erniedrigen.

Es sei auch hier gestattet Zahlenbeispiele anzufügen. Es werde $\mathfrak{r} = 3 = 2\cdot 1+1$, also $h = 1$ gewählt. Zur Gruppe $(\mathfrak{r} = 3)$ gehören die Indicespaare $\mathfrak{m} = 3$, $\mathfrak{n} = 0$ und $\mathfrak{m} = 1$, $\mathfrak{n} = 1$. Folglich sind die $b_{3,0}$, b_{11} und $c_{3,0}$, c_{11} darstellenden Determinanten vom Grade 5. Die zu 3, 0, resp. zu 1, 1 gehörende Indicesreihe ist:

[Gruppe:	(0)	(1)	(2)	(3)]
	0, 0;	1, 0;	2, 0, 0, 1;	3, 0 resp. 1, 1.

Folglich ist:

	0, 0	1, 0	2, 0	0, 1	3,0 (resp. 1, 1)	
	1	0	0	0	1	0, 0
	−1	1	0	0	0	1, 0
$b_{3,0} =$	0	−1	1	0	0	2, 0
(resp. $b_{1,1}$)	3	−4	0	1	0	0, 1
	0	0	−1	0	0	3, 0
		(10)	(−8)	(−5)		(resp. 1, 1)

	0, 0	1, 0	2, 0	0, 1	3,0 (resp. 1, 1)	
	1	0	0	0	1	0, 0
	0	1	0	0	0	1, 0
$c_{3,0} =$	0	0	1	0	0	2, 0
(resp. $c_{1,1}$)	1	−16	0	1	0	0, 1
	0	0	0	0	0	3, 0
		(10)	(−32)	(−1)		(resp. 1, 1)

Die oberen Zahlen in der letzten Zeile jeder der beiden Determinanten sind zu nehmen bei der Berechnung von $b_{3,0}$ und $c_{3,0}$, die unteren (eingeklammerten) bei der Berechnung von $b_{1,1}$ und $c_{1,1}$.

Man findet:

$$b_{3,0} = 1, \quad b_{1,1} = 3 \text{ und } c_{3,0} = 0, \quad c_{1,1} = -1,$$

welche Werte mit den auf recurrentem Wege berechneten übereinstimmen.

Würzburg, Juli 1894.

Ueber invariante Processe auf binären Gebieten höheren Geschlechtes [1]).

Von

G. Pick in Prag.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 27. November 1894.

. . . . . Ich beginne mit der Construction der ersten Ueberschiebung. Den Formen A, B etc., welche auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p existiren, gehören Gradzahlen α, β etc. zu in der Art, daß die Verhältnisse der Größen $\sqrt[\alpha]{A}$, $\sqrt[\beta]{B}$ etc. Functionen des Orts auf der Fläche sind. (Die Gradzahlen selbst sind zunächst nur bis auf einen gemeinsamen Factor bestimmt, über welchen erst nachher verfügt wird). Als erste Ueberschiebung von A und B betrachte ich nun den Ausdruck

$$(A, B)_1 = \frac{\frac{1}{\beta} A\,dB - \frac{1}{\alpha} B\,dA}{d\omega}$$

wo $d\omega$ die überall endliche und nirgends verschwindende Differentialform bedeutet. Ist 2λ der Grad derselben, so ist $(A, B)_1$ vom Grade $\alpha + \beta - 2\lambda$. Sind A, B unverzweigte ganze Formen, so ist $(A, B)_1$ eine Form der gleichen Beschaffenheit.

Es seien A, B zwei rationale Formen der Fläche von den Graden α, $\alpha - 2\lambda$, f eine unbekannte Form. Dann stellt

$$(A, f)_1 + Bf = 0$$

eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für f dar, deren Integral bei Periodenwegen constante Factoren zu sich nimmt. Es liegt hier offenbar die Möglichkeit vor, die Theorie der „multi-

1) Auszug aus einem an Hrn. F. Klein gerichteten Briefe.

cativen" Formen independent zu entwickeln, d. h. ohne, wie es Ritter thut, die Primform $\Omega(x, y)$ als Durchgangspunkt zu benützen.

Setzt man für einen Augenblick mit Ritter den Grad einer multiplicativen Primform gleich Eins, so wird

$$\lambda = -(p-1);$$

zwei unverzweigte ganze multiplicative Formen A, B mit m, n Verschwindungspunkten beziehungsweise geben somit als erste Ueberschiebung eine ebensolche Form mit $m+n+2p-2$ Nullpunkten. Gibt man nicht die Formen selbst, sondern nur ihre Nullpunkte an, so sind erstere blos bis auf nirgends verschwindende Multiplicatoren bestimmt. Dies hat zur Folge, daß die erste Ueberschiebung ein additives Glied von der Form

$$\varphi A B$$

enthält, wo φ die bekannte Bedeutung hat. Geometrisch genommen gehört also zu zwei Punktgruppen als erste Ueberschiebung eine Schaar von Punktgruppen von der Mächtigkeit p. (Dieselbe ist im Allgemeinen eine Theilschaar; zur Vollschaar wird sie nur für Primformen und besteht dann aus allen Gruppen, welche den zwei Punkten zusammen mit den Nullpunkten einer φ corresidual sind.)

In dieser Schaar ist jedoch stets eine Gruppe ausgezeichnet, wenn die gegebenen Gruppen selbst corresidual sind. Es sei $z = \frac{z_2}{z_1}$ eine rationale Function der Fläche, z_1, z_2 ganze multiplicative Formen ohne gemeinsamen Theiler, so ist $(z_1, z_2)_1$ nichts anderes als die „Verzweigungsform" der über der z-Ebene ausgebreitet gedachten Fläche.

Neue Bildungen, nämlich invariante Differentialformen höherer Ordnung treten erst auf, wenn man zu höheren Ueberschiebungen übergeht.

In der gewöhnlichen binären Invariantentheorie kann man die zweite Ueberschiebung zweier Formen A, B von den Graden m, n durch die Formel

$$\begin{aligned}(A, B)_2 (x\,dx)^2 = \frac{A \cdot d^2 B}{n(n-1)} - 2\frac{dA \cdot dB}{mn} + \frac{B d^2 A}{m(m-1)} \\ - \left(\frac{A dB}{n(n-1)} + \frac{B dA}{m(m-1)}\right)\frac{(x\,d^2x)}{(x\,dx)} \\ + \frac{m+n-2}{(m-1)(n-1)} AB \frac{(dx\,d^2x)}{(x\,d^2x)}\end{aligned}$$

definiren. Die Differentialform $\frac{(x\,d^2x)}{(x\,d\,x)}$ ist das logarithmische Differential von $(x\,d\,x)$; die gleichfalls überall endliche Differentialform $\frac{(dx\,d^2\,x)}{(xdx)}$ läßt sich jedoch nicht aus (xdx) herleiten. Will man also nach Analogie dieser Formel auf beliebiger Riemann'scher Fläche die zweite Ueberschiebung definiren, so ist eine überall endliche Differentialform zweiter Ordnung neu einzuführen; sie heiße $d^2\tilde{\omega}$. Ich setze dann

$$(A,\ B)_2\,d\omega^2 = \frac{A\,d^2B}{\beta(\beta-\lambda)} - 2\frac{dA\cdot dB}{\alpha\beta} + \frac{B\,d^2A}{\alpha(\alpha-\lambda)}$$
$$-\left(\frac{AdB}{\beta(\beta-\lambda)} + \frac{BdA}{\alpha(\alpha-\lambda)}\right)\frac{d^2\,\omega}{d\,\omega}$$
$$+\frac{\alpha+\beta-2\lambda}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)}\,AB\,d^2\tilde{\omega}.$$

Um das Differential $d^2\tilde{\omega}$ festzustellen, muß man dessen functionentheoretisches Verhalten ebensowohl wie seine Homogeneitätseigenschaften in Betracht ziehn. Hier zeigt sich nun eine wesentliche Unbestimmtheit von $d^2\tilde{\omega}$. Dasselbe ist nämlich nur bestimmt bis auf eine additive Größe von der Form

$$\Phi\,d\omega^2,$$

wo Φ eine beliebige ganze rationale Form der Fläche vom Grade -4λ ist. Hieraus entspringt nun eine Unbestimmtheit der zweiten Ueberschiebung selbst, zu welcher eine Größe

$$\Phi\cdot AB$$

willkührlich addirt werden darf. In ähnlicher Weise vieldeutig erweist sich jede höhere Ueberschiebung. So ist zum Beispiel $(A,\ B)_3$, wenn A und B von gleichem Grade sind, bestimmt bis auf ein additives Glied von der Form

$$\Phi\cdot(A,\ B)_1.$$

Da eine solche Form Φ vom Grade -4λ $(4p-4)$ Nullpunkte besitzt, so enthalten also die höheren Ueberschiebungen $(3p-3)$ willkührliche Constanten.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, ausdrücklich zu bemerken, daß mit Festlegung einer einzigen Ueberschiebung sämmtliche vollkommen bestimmt sind. Auch sei noch hervorgehoben, daß die Unbestimmtheit der höheren Ueberschiebungen mit der früher erwähnten blos

geometrischen Vieldeutigkeit der ersten Ueberschiebung nicht verwechselt werden darf.

Mit den gewonnenen Mitteln kann man nun die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche zu den ∞^{3p-3} Functionen gehören, die auf der Fläche nirgends verzweigt sind, und sich bei Periodenwegen linear gebrochen umsetzen, aufstellen. Es sei

$$\eta = \frac{f_2}{f_1}$$

eine solche Function; man kann dann verlangen, daß f_1 und f_2 ganze Formen seien, welche ausnahmslos für jeden Punkt der Fläche reguläres Verhalten zeigen und nirgends gleichzeitig verschwinden. Dann ist

$$\frac{(f\,df)}{d\omega}$$

eine überall endliche und von Null verschiedene multiplicative Form, also von der Gestalt

$$e^w,$$

wo ω ein Integral erster Gattung bedeutet. Ersetzt man f_1, f_2 durch $e^{-\frac{1}{2}w}f_1$, $e^{-\frac{1}{2}w}f_2$, so wird obiger Quotient constant. Der Grad dieser Formen wird demnach gleich λ, und man kann dieselben so normiren, daß

$$(f_1, f_2)_1 = 1$$

wird, was wir nun voraussetzen wollen.

Es sei nun, wie oben,

$$z = \frac{z_2}{z_1}$$

eine beliebige rationale Function der Fläche; der Grad von z_1, z_2 sei α, und $\frac{\alpha}{\lambda}$ zur Abkürzung mit ν bezeichnet. Ferner sei

$$\sigma = (z_1, z_2)_1,$$
$$\tau = (z_1, z_2)_3,$$
$$\Sigma = (\sigma, \sigma)_2$$

gesetzt. Werden dann Ueberschiebungen in Bezug auf z_1, z_2 als unabhängige Variable durch eckige Klammern angedeutet, so schreibt sich die gesuchte Differentialgleichung in der Form

$$[\sigma^k, f]_2 = \left\{\frac{(\nu-2)[(2\nu-2)k-(2\nu-1)]}{(2\nu-3)[(2\nu-2)k-\nu]}\sigma^{k-3}\tau - \frac{(\nu-1)(k-2)}{(2\nu-2)k-\nu}\sigma^{k-4}\Sigma\right\}\cdot f.$$

Am einfachsten gestaltet sich diese Gleichung für $k = \frac{2\nu-1}{2\nu-2}$ oder $k = 2$. Letztere Festsetzung ergiebt

$$[\sigma^2, f]_2 = \frac{\nu-2}{3\nu-4}\frac{\tau}{\sigma}\cdot f\ ^{1)}.$$

Macht man, in Uebereinstimmung mit der functionentheoretischen Bedeutung von η, die Formen f_1, f_2 zu unabhängigen Veränderlichen, und normirt dementsprechend die Grade der Formen gemäß der Festsetzung

$$\lambda = 1,$$

so verwandeln sich alle die erklärten Bildungen in die entsprechenden der gewöhnlichen Invariantentheorie. Da bei eindeutiger Transformation des algebraischen Gebildes sich f_1, f_2 linear homogen umsetzen, so ist es ja auch im Vorhinein evident, daß den Processen der gewöhnlichen binären Invariantentheorie auch hier Invarianteneigenschaft zukommt. Es trifft dies auch dann noch zu, wenn man statt der oben gewählten Spaltung von η eine andere zu Grunde legt. Die Ueberschiebungen jedoch, die man so erhält, sind von wesentlich complicirterer Natur, sie enthalten fremdartige Bestandtheile.

Ich bemerke zum Schluß, daß der Fall $p = 1$ von den gegebenen Auseinandersetzungen in mancher Beziehung auszuschließen ist, wie nicht näher erörtert zu werden braucht.

Prag. Anfang November 1894.

1) Sind nur einfache Verzweigungspunkte über der z-Ebene vorhanden, so wären die richtigen Entwicklungsexponenten allerdings schon gesichert, wenn rechts eine ganze Form als Factor von f stände. Eine solche Differentialgleichung würde jedoch im Allgemeinen mit Logarithmen behaftete Integrale aufweisen. Im hyperelliptischen Falle ist aber in der That τ durch σ theilbar, wie man sofort daraus schließt, daß dann σ^2 in z_1, z_2 selbst rational ist, also logarithmische Entwickelungsglieder bei den Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ ausgeschlossen sind.

Ueber die Eberhard'schen Hexagonoide.

Von

A. Schoenflies.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. November von dem vorsitzenden Secretär.

1. In seinem grundlegenden Werke „Zur Morphologie der Polyeder"[1]) hat Herr Eberhard zum ersten Mal mit Erfolg den Versuch unternommen, die Gesammtheit aller morphologisch verschiedenen Polyedertypen nach einer einheitlichen Methode zu classificiren und abzuleiten. Das Haupthilfsmittel der Untersuchung bildet der Begriff der Reducibilität und Erweiterungsfähigkeit der Polyeder[2]), sowie im Anschluß hieran die Betrachtung gewisser einfach oder mehrfach zusammenhängender Flächenstücke, die aus lauter Sechsecken zusammengesetzt sind, und Hexagonoide[3]) heißen. Diese Hexagonoide stehen im Mittelpunkt des Eberhard'schen Buches; ihnen sind die nachfolgenden Bemerkungen gewidmet.

2. Ein Hexagonoid kann man sich stets auf eine Ebene ausgebreitet denken; beachtet man nun, daß es nach den Darlegungen von Herrn Eberhard gestattet ist, die einzelnen Sechsecke in beliebiger Gestalt anzunehmen, so liegt es nahe, sie regulär vorauszusetzen. Durch diesen einfachen Gedanken erleichtert man die Untersuchung der Hexagonoide sehr wesentlich; sie werden Stücke einer regulären ebenen Sechseckteilung und werden dadurch nebst ihren Eigenschaften dem Verständniß wesentlich näher gerückt. Von diesem Gesichtspunkt aus lassen sich die Eberhard'schen Sätze in einfacher Weise

1) Leipzig, 1891.
2) a. a. O. S. 60 ff.
3) a. a. O. S. 94 ff.

ableiten, resp. weiter ausdehnen; ich teile einige meiner Resultate hier mit. Die ausführliche Darlegung wird an anderer Stelle erfolgen

3. Die Bedeutung der Hexagonoide ist folgende. Denkt man sich ein Polyeder längs eines oder mehrerer Kantenpolygone aufgetrennt, so daß es in mehrere einzelne Theile zerfällt, so ist es bei bestimmter Wahl dieser Polygone möglich, diese Theile durch Einschaltung hexagonoidischer Flächenstücke wieder zu einem einzigen Polyeder zu verbinden. Ein solches Polyeder heißt erweitertes Polyeder, es gehört zu denselben für die Classificirung characteristischen Zahlenwerthen, wie das Polyeder, aus dem es entstanden ist. Hieraus kann man schließen, daß man sich bei der Aufzählung aller Polyedertypen auf die nicht durch Erweiterung ableitbaren zu beschränken hat; für jedes von ihnen ist dann noch die Frage zu beantworten, welches diejenigen Kantenpolygone sind, die eine Einschaltung von Hexagonoiden gestatten. Diese Kantenpolygone sind Grenzpolygone hexagonoidischer Flächenstücke und müssen daher auf Hexagonoiden verlaufen können. Dadurch wird die Untersuchung auf diejenigen Kantenpolygone concentrirt, die auf Hexagonoiden liegen.

4. Die genannten Kantenpolygone gehen bei der Abbildung auf die Ebene in Polygone über, die aus Sechsecken gebildet sind, es ist aber zweckmäßig, sie durch andere Polygone zu ersetzen. Wir setzen für das Folgende zunächst voraus, daß das Kantenpolygon auf einem einfach zusammenhängenden Hexagonoid verläuft, das wir uns unbegrenzt groß denken können. Seine Abbildung ist ein begrenztes Stück einer ebenen regulären Sechseckstheilung, die in ihrer gesammten Ausdehnung dem unbegrenzten Hexagonoid entspricht. Wir fassen nun die Mittelpunkte aller Sechsecke in's Auge, deren Seiten in das Kantenpolygon eingehen, und verbinden diese Mittelpunkte durch gerade Linien; das so entstehende Polygon soll Mittelpunktspolygon heißen. Seine Seiten gehören sämmtlich den drei Zügen von parallelen Geraden an,- die die Mittelpunkte der Sechsecke enthalten und eine reguläre Dreieckstheilung constituiren. Da jede Seite eines Kantenpolygons zwei benachbarten Sechsecken angehört, so entsprechen jedem Kantenpolygon zwei Mittelpunktspolygone. Sind s und s' die Zahlen der Ecken dieser Polygone, resp. die Zahlen der Sechsecke, die von ihnen durchsetzt werden, so stellt $s-s'$ diejenige Zahl dar, die Herr Eberhard als Characteristik bezeichnet[1]). Dies gilt nun auch für Hexagonoide von mehr-

1) a. a. O. S. 94.

fachem Zusammenhang, und damit ist eine anschaulich geometrische Bedeutung der Characteristik gewonnen. Diese Bedeutung scheint mir die einfachste und natürlichste zu sein.

5. Die Eberhard'sche Definition der Charakteristik ist der Ausdruck

$$c = a_3 + 2a_4 + 3a_5 - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$$

wo die a_k, b_k folgende Bedeutung haben. Jedes Kantenpolygon wird auf beiden Seiten von Sechsecken begrenzt und enthält von jedem dieser Sechsecke resp. 1, 2, 3, 4, 5 auf einander folgende Seiten. Nun bedeutet a_k die Zahl der Sechsecke auf der einen Seite des Kantenpolygons, die k consecutive Seiten zu ihm beitragen, und das gleiche bedeutet b_k für die auf der andern Seite des Polygons liegenden Sechsecke. Derartige k aus einem Sechseck stammende Seiten will ich kurz als k-Zügler bezeichnen. In jedem solchen Sechseck liegt eine Ecke eines Mittelpunktspolygons; die Umlaufsrichtung des Polygons dreht sich bei einem Dreizügler, Vierzügler, Fünfzügler resp. um

$$\frac{\pi}{3}, \quad 2\frac{\pi}{3}, \quad 3\frac{\pi}{3},$$

wir können daher den bezüglichen Ecken die Winkelcoefficienten 1, 2, 3 zuordnen. Die Zahlen a_k und b_k entsprechen daher in einfacher Weise den Winkelzahlen der Mittelpunktspolygone. Die Zahlen a_3 und b_3 besagen nämlich, daß die Seite resp. die Umlaufsrichtung dieses Polygons a_3 Drehungen von der Winkelzahl 1 macht, und b_3 Drehungen von der Winkelzahl 1 im entgegengesetzten Sinn. Für ein beliebiges geschlossenes Polygon beträgt aber die Summe der Drehungen, die die Umlaufsrichtung macht, 2π, die Summe der Winkelzahlen also 6, und daraus folgt sofort, daß für ein beliebiges Kantenpolygon, das auf einem einfach zusammenhängenden Hexagonoide verläuft, die Characteristik den Werth 6 hat.

Ist das Hexagonoid zweifach zusammenhängend, so seien P und P' irgend zwei auf ihm verlaufende Kantenpoloygone, die wir der Einfachheit halber als sich nicht kreuzend annehmen, und überdies so, daß sie selbst einen zweifach zusammenhängenden Flächentheil begrenzen. Nachdem wir im Vorstehenden die Mittelpunktslinien für einfach zusammenhängende Flächenstücke an der Hand der regulären Sechsecktheilung eingeführt haben, können wir sie nunmehr auch für die zweifach resp. mehrfach zusammenhängenden Hexagonoide beibehalten. Wir denken uns nun die

Mittelpunktspolygone, die zu P und P' gehören, und legen von P nach P' einen Querschnitt, der ebenfalls Theil eines Mittelpunktspolygons ist. Das Hexagonoid wird dadurch einfach zusammenhängend und wird daher von einem Polygon begrenzt, dessen Characteristik den Werth 6 hat. Andrerseits setzt sich diese Characteristik aus den Characteristiken c und c' der Polygone P und P', sowie aus denjenigen des Querschnitts in einfacher Weise zusammen, und es folgt daraus die Existenz der Gleichung

$$c = c'$$

d. h. alle die betrachteten Kantenpolygone des Hexagonoids haben die gleiche Characteristik[1]).

Dieses Verfahren läßt sich ohne weiteres auf Hexagonoide von beliebigem Zusammenhang übertragen, d. h. auf solche, deren gesammte Begrenzung von lauter Polygonen gebildet wird. Um die bezügliche Formel aufzustellen, müssen wir aber annehmen, daß für die Grenzpolygone die Characteristik überall in Bezug auf das Innere des Hexagonoids zu rechnen ist. Alsdann ergiebt sich leicht die Gleichung

$$c + c' + c'' + \cdots + (\alpha - 1)6 = 0$$

wenn das Hexagonoid ein $(\alpha + 1)$fach zusammenhängendes ist.

6. Wir beschränken uns im Folgenden auf zweifach zusammenhängende Hexagonoide. Da jedes auf ihnen verlaufende Kantenpolygon der oben betrachteten Art die nämliche Characteristik c hat, so heißt auch das Hexagonoid ein solches von der Characteristik c und wird durch H_c bezeichnet.

Ist irgend ein Hexagonoid gegeben, so kann man an die offenen Enden im Allgemeinen noch Sechsecke nach Belieben ansetzen, und so die Ausdehnung des Hexagonoids in's unbegrenzte vergrößern. Dies geht jedoch nicht unbeschränkt. Da nämlich, wie oben (4) gezeigt worden ist, c die Differenz der Sechseckzahlen zu beiden Seiten des Kantenpolygons bedeutet, so kann ein Hexagonoid H_c für den Fall, daß $c > 0$ ist, durch Anfügung von Sechsecken nur nach der einen Seite in's Unbegrenzte ausgedehnt werden, nach der andern Seite dagegen muß dieser Proceß schließlich einmal ein Ende nehmen. Dagegen können die Hexagonoide H_0 auf diese Weise nach beiden Seiten in's Unbegrenzte fortgesetzt werden. Hieraus folgt sofort, daß Kantenpolygone, längs deren eine Polyedererweiterung möglich ist, nur auf einem Hexa-

1) a. a. O. S. 94.

gonoid H_0 liegen können. Ist nämlich P ein solches Kantenpolygon eines Polyeders $\mathfrak{P}$, so wird die längs P einschaltbare hexagonoidische Fläche h außer von P noch von einem zu P isomorphen Polygon P_1 begrenzt. Betrachten wir jetzt nur die Fläche h, so muß sich an sie längs P_1 notwendig ein Stück h_1 ansetzen lassen, das mit h isomorph ist und zu P_1 ebenso liegt, wie h zu P. Ist P_2 das obere Grenzpolygon, so muß sich hieran ein Stück h_2 ansetzen lassen, u. s. w.; h muß also nach der einen, und ebenso nach der andern Seite unbegrenzt fortsetzbar sein, was nur der Fall ist, wenn P auf einem Hexagonoid H_0 liegt, also die Characteristik Null hat[1]).

Diese Bedingung ist zwar nothwendig, aber nicht hinreichend. Ist nämlich P ein Polygon der Charakteristik Null, so kann man durch wiederholte Ein- und Anfügung von Sechsecken stets ein Hexagonold H_0 bilden, das P enthält; es kann aber der Fall eintreten, daß dieses H_0 eine solche Lage zu P annimmt, daß P sich auf ihm selbst durchsetzt, also reducibel ist. Alsdann bestimmt es kein Kantenpolygon der verlangten Art.

7. Die morphologischen Eigenschaften der Hexagonoide H_0 lassen sich folgendermaßen der Anschauung zugänglich machen. Wir fassen jetzt wieder die auf den Hexagonoiden verlaufenden Mittelpunktslinien in's Auge. Für ein einfach zusammenhängendes Hexagonoid ist jede Mittelpunktslinie ein einfacher Querschnitt; für die zweifach zusammenhängenden ist dies nicht mehr der Fall. Es läßt sich aber zeigen — und dies gilt für jeden Werth von c — daß es auch für sie Mittelpunktslinien giebt, die einfache Querschnitte abgeben, die also, wenn das Hexagonoid von den beiden Polygonen P und P' begrenzt wird, auf P beginnen, und auf P' endigen.

Man denke sich nun in dem unbegrenzten Hexagonoid H_0 eine solche Mittelpunktslinie t gezogen, und es sei M ein beliebiger Sechsecksmittelpunkt. Dann kann zunächst der Fall eintreten, daß eine der beiden andern von M ausgehenden Mittelpunktslinien t' oder t'' wieder nach M zurückkehrt, während die zweite die Linie t in einem von M verschiedenen Punkte M' trifft, oder aber beide von M ausgehenden Linien t' und t'' treffen t in neuen Punkten. Wir können hiermit die Vorstellung verbinden, daß H_0 Transformationen in sich selbst zuläßt. Nämlich ist M_1 derjenige Punkt von t', der auf M folgt, so können wir die Mittelpunktslinie t und die von ihr durchzogenen Sechsecke auf die benach-

1) Vgl. a. a. O. Theorem 14, S. 131.

barte t_1 resp. die zugehörigen Sechsecke fallen lassen, und es geht dann notwendig das ganze Hexagonoid H_0 in sich über. Wenn nun die Mittelpunktslinie t' wieder nach M zurückkehrt, so gestattet H_0 cyclische Transformationen, und zwar q, wenn q die Zahl der von t' durchzogenen Sechsecke ist; den beiden andern Mittelpunktslinien entsprechen loxodromische Transformationen; sie sind bestimmt durch die Zahl der Sechsecke, die t' durchzieht, bis es wieder t in M' erreicht, und die Zahl der Sechsecke, die die Linie t von M bis M' durchzieht. Im allgemeinen giebt es für ein beliebiges H_0 drei loxodromische Transformationen, von denen im besondern eine cyclisch werden kann. Hieraus lassen sich die bezüglichen Sätze über Elementarpolygone der Characteristik Null [1]) leicht ableiten; ich gehe an dieser Stelle nicht weiter darauf ein.

8. Man kann fragen, wann für beliebige Hexagonoide H_c analoge Verhältnisse eintreten, resp. wann auf einem H_c isomorphe Polygone liegen können. Sind P und P' zwei solche Polygone, so folgt zunächst, daß sie sich nothwendig kreuzen, weil sonst das Hexagonoid die Characteristik Null haben muß. Wie wir sahen, geht H_c nach einer Richtung unbegrenzt weiter fort; wir wollen, um den Sprachgebrauch zu erleichtern, sagen, daß diese Theile von H_c jenseit der Polygone P und P' liegen. Man kann nun leicht zeigen, daß man jenseit von P ein Polygon Q construiren kann, das nur Winkelcoefficienten 1 enthält, ebenso sei Q' das analoge zu P'; so läßt sich jedenfalls H_c so mit sich zur Deckung bringen, daß Q auf Q' fällt. Dabei kommt Q' in eine Lage Q'', das Polygon Q'' kommt dadurch in eine Lage Q''' u. s. w., d. h. wir erhalten einen Cyclus von isomorphen Polygonen

$$Q,\ Q',\ Q'' \dots Q^{(\lambda-1)},$$

der sich notwendig schließt, sodaß $Q^{(\lambda)}$ wieder identisch mit Q ist. Es könnte an sich allerdings der Fall eintreten, daß die Polygone Q, Q', Q'' ... sich mehr und mehr derjenigen Seite nähern, auf der H_c begrenzt ist, so daß sie schließlich nicht mehr auf H_c enthalten sind; in diesem Fall kann man aber Q durch ein ihm paralleles Polygon Q_1 das jenseits Q verläuft, so ersetzen, daß alle Polygone Q_1', Q_1'', ... sicher ganz auf H_c bleiben. Die Polygone Q, Q', Q'', ... werden einander vielfach durchsetzen, ihr äußerer Rand bildet aber ein Polygon R, das λ Transformationen in sich gestattet, d. h. es hat

1) Vgl. a. a. O. die Entwicklungen des § 19, S. 111—152.

auch H_c die Eigenschaft λ cyclische Transformationen in sich zuzulassen.

9. Die so bestimmten Hexagonoide können als Rotationshexagonoide bezeichnet werden; auch die Hexagonoide H_0 mit cyclischer Transformationsfähigkeit gehören hierher. Es besteht aber zwischen beiden ein wesentlicher Unterschied. Für die Hexagonoide H_0 zeigen die obigen Betrachtungen, daß sie nur auf eine ganz bestimmte Art als Rotationshexagonoide aufzufassen sind, für die Hexagonoide H_c dagegen ist dies nicht notwendig der Fall Dies rührt daher, weil die letzgenannten nach einer Seite begrenzt sind und wir für die Betrachtungen des vorigen Paragraphen nur diejenigen Theile berücksichtigt haben, die die Polygone Q, Q', Q''.. enthalten, resp. jenseits von ihnen liegen. Es wird dabei also von gewissen Sechsecken abgesehen, die an dem begrenzten Stück von H_c liegen. Ob die Tilgung solcher Sechsecke nothwendig ist, um dem Hexagonoid Rotationscharacter aufzuprägen, hängt von den einzelnen H_c ab; in manchen Fällen ist sie es wirklich. Hier tritt aber nun die merkwürdige Erscheinung auf, daß sich gewisse Hexagonoide durch verschiedene Tilgung solcher Sechsecke auf verschiedene Arten als Rotationshexagonoide auffassen lassen. Soll dies möglich sein, so muß es zu dem Polygon R des vorigen Paragraphen, das durch jede cyclische Transformation von H_c in sich übergeht, ein isomorphes R_1 geben, das natürlich R kreuzt; für dieses giebt es dann ebenfalls gewiß eine Gruppe cyclischer Transformationen, die den bezüglichen Theil von H_c in sich überführen. Ueber die Gestalt dieser Polygone R lassen sich verschiedene interessante Sätze ableiten, auf die ich jedoch hier nicht eingehe.

10. Für den einfachsten Fall, daß der abschließende Rand des Hexagonoids H_c ein ebenes Polygon, also ein c-Eck ist, hat Herr Eberhard einige der einschlägigen Fragen bereits behandelt. Für diesen Zweck kann man die hier zu Grunde liegende Abbildung folgendermaßen benutzen, resp. erweitern Ist zunächst $c = 6$, so liegt es nahe, das Hexagonoid H_6 durch Einfügung des fehlenden Sechsecks einfach zusammenhängend zu machen; dann gestattet es alle Transformationen in sich, die der regulären Sechsecktheilung zukommen, und wir erhalten zu jedem auf H_6 verlaufenden Polygon unendlich viele isomorphe, was keiner weiteren Bemerkung bedarf.

Ist c ein Vielfaches von 6, also $c = 6c'$, so kann man die Abbildung in der Weise verallgemeinern, daß man mehrfach über einander liegende reguläre Sechsecktheilun-

gen mit einem Windungspunkt zuläßt. Der Windungspunkt ist der Mittelpunkt irgend eines Sechsecks, und zwar desjenigen, das c'-fach gerechnet das Abbild des c-Ecks darstellt. Als Querschnitt benutzen wir den einen Theil einer von ihm ausgehenden Mittelpunktslinie. Jedem Kantenpolygon des Hexagonoids H_c entspricht dann ein Mittelpunktspolygon unserer Windungsfläche, dessen Seiten den Linien der regulären Dreieckstheilung angehören, und man sieht auch hier sofort, daß man dieses Mittelpunktspolygon im Allgemeinen in neue Lage bringen kann; dies wird nur erst dann unmöglich, wenn man den Windungspunkt überschreiten müßte. Hieraus kann man die bezüglichen Sätze leicht entnehmen.

Dieselbe Vorstellung kann man nun auch für einen beliebigen Werth von c ausbilden. Hier muß man nur zunächst das Hexagonoid H_c selbst als sich mehrfach überdeckend betrachten, nämlich so oft, bis die Eckenzahl des Grenzpolygons ein Vielfaches von 6 geworden ist, und kann dann die gleiche Abbildung vornehmen. Dem einfach überdeckten Hexagonoid H_c entsprechen dann nur gewisse Streifen oder Sectoren unserer regulär getheilten Windungsfläche. Ist nun wieder P ein Polygon von H_c, das durch cyclische Transformation von H_c in sich übergeht, so erhalten wir auch hier ein zu ihm isomorphes Polygon P' auf H_c, wenn wir die Polygone als mehrfach umlaufend voraussetzen. Einfach umlaufend sind sie nur dann möglich, wenn c ein Vielfaches von 6 ist. Das genauere Eingehen auf diese Verhältnisse und die morphologische Natur der bezüglichen Polygone behalte ich mir für die ausführliche Darstellung vor.

Hauptresultate der Untersuchungen über die elektrischen Erdströme in Bulgarien.

Von

P. Bachmetjew.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 8. December 1894.

Die elektrischen Erdströme Bulgariens habe ich im Jahre 1893 zu studieren angefangen. Bei diesen Untersuchungen benützte ich ausschließlich die Elektroden von Brander[1]), die aus porösen mit Zinksulfatlösung gefüllten Thonzellen, in welche amalgamirte Zinkplatten tauchten, bestanden. Wie die Controllversuche ergaben, hatten diese Elektroden keine merkliche Polarisation gezeigt und waren auch von allen Einflüssen, welche irgend einen Nebenstrom, außer den in der Erde circulierenden Erdströmen, hervorrufen können, frei.

Im Allgemeinen wurden die Untersuchungen folgendermaßen ausgeführt:

Auf der Erde wurde ein Quadrant von 50 bis 150 Meter Radius abgesteckt und dessen Bogen in 6 bis 8 gleiche Abschnitte getheilt, in welche die obengenannten Elektroden vergraben wurden, wobei die Gefässe von allen Seiten mit einer dicken Schicht reinen Sandes umgeben wurden. Die isolirten Drähte verbanden diese Electroden mit einem Commutator und einem Wiedemann'schen Galvanometer, dessen Widerstand 160 Ohm war. Sobald man nun die Elektrode, welche sich im Centrum des Quadranten befand, mit irgend einer auf dessen Bogen befindlichen Electrode verband, so erhielt man einen Strom, welcher stets in der Richtung des Quadrantenradius floß. Dieser Strom wurde nun, sowohl bei Tage als auch bei Nacht, in allen 6—8 Radien alle halbe Stunde beobachtet. Die Richtung des Stromes wurde mittelst eines Thermoele-

1) K. Brander, „Beitrag zur Untersuchung elektr. Erdströme“ Akad. Abhandl. 1888. Helsingfors.

mentes, der Widerstand der Kette dagegen durch Einschaltung eines Rheostaten bestimmt.

Untersucht wurden folgende Plätze:

I. Ein $3\frac{1}{2}$ km von Sofia in der Nähe der Constantinopeler Chaussée befindliches Terrain. Radius des Quadranten war $R =$ 80 Meter und die Anzahl der Beobachtungslinien $n = 7$. Die Beobachtungen wurden im Oktober 1893 ausgeführt[1]).

II. Das tracäische Grab beim Dorfe Slatino (5 km östlich von Sofia entfernt), $5\frac{1}{2}$ Meter hoch und circa 13 Meter im Basisdurchmesser ($n = 8$). Die Beobachtungen wurden im Juli 1894 ausgeführt.

III. Der Abhang des Vitoschgebirges beim Dorfe Bojana (8 km von Sofia nach SW. entfernt). Eine der Elektroden (A) wurde beim Fuße des Berges vergraben; die zweite (F) auf einem der Bergkämme (südöstlich von A) 400 Meter über A. Die dritte (E) in der Schlucht beim Fuße des Batilfelsens (südlich von A) circa 50 Meter über A. Die vierte (B) auf der Spitze des Batilfelsens circa 100 Meter über A. Die fünfte (D) beim Fuße eines Hügels, welcher aus Steinbruchresten besteht und noch aus der Römerzeit herrührt (nordwestlich von A), circa 10 Meter unter A und die sechste (C) auf der Spitze dieses Hügels circa 10 Meter über A. Hier wurden die Beobachtungen zu Ende Juli und Anfangs August 1894 ausgeführt.

IV. Bei der Eisenbahnstation von Sofia, auf ebenem Felde (600 Meter über dem Niveau des Meeres). Der Radius des Kreises war 150 Meter und die Anzahl der Linien 16. Diese Beobachtungen wurden im August 1894 ausgeführt.

V. Auf dem Balkangebirge bei Petrohan (1400 Meter über dem Meeresniveau) 60 km nördlich von Sofia.

VI. In Lom-Palanka an der Donau (160 km nördlich von Sofia) und zwar in der Stadt selbst.

VII. Bei der Muster-Farm („Obraszowi Tschiflik“) in der Nähe von Rustschuk 6 km von der Donau entfernt (350 km von Sofia nach Osten) und zwar in einer ebenen Gegend.

VIII. In Gorublane in der Nähe von Sofia (8 km südöstlich) in ebener Gegend.

In den letzten 4 Stationen hatte der Quadrant einen Radius von 50 Meter und 8 Elektroden. Die Beobachtungen wurden hier gleichzeitig Anfangs September 1894 ausgeführt, wobei mir die Studenten der Hochschule zu Sofia assistirten.

1) Journ. der russ. phys.-chem. Gesellsch. XXVI p. 31 und 159. 1894.

Die Untersuchungen aller obgenannten Orte außer No. I wurden auf Kosten des „Elizabeth Thompson Science Fund“ ausgeführt.

Die Hauptresultate, zu welchen ich bei diesen Untersuchungen gelangt bin, sind folgende:

Der Erdstrom fließt in Bulgarien im allgemeinen von SW. nach NE. und bildet mit dem magnetischen Meridian verschiedene Winkel in verschiedenen Gegenden. So z. B. bildete derselbe im September 1894 in Sofia einen Winkel von circa 0^0, in Petrochan von circa 70^0, in Lom-Palanka von circa 45^0, in Rustschuk von circa 70^0. Dieser Winkel ist für einen und denselben Platz jedoch nicht constant, er ändert sich vielmehr periodisch innerhalb 24 Stunden; z. B. in der Gegend No. I war dieser Winkel (14. Oktober 1893) im Minimum $26\frac{1}{2}^0$ und im Maximum $35\frac{1}{2}^0$. Das Minimum trat um 1 Uhr Nachmittags (Ortszeit) und das Maximum um circa 5 Uhr Abends ein.

Außer diesen täglichen Aenderungen des Winkels existiren auch noch Variationen von längerer Periode, wobei sich die Richtung des Stromes allmälig dem magnetischen Meridian nähert oder entfernt; so z. B. im Oktober 1893 beim Orte No. I bildete der Erdstrom mit dem magnetischen Meridian einen Winkel von circa 32^0; im August 1894 bei der Eisenbahnstation von Sofia war dieser Winkel anfangs 45^0 und nach einigen Tagen nur circa 22^0; im September war derselbe in Gorublane (auch nahe bei Sofia) fast 0^0. Die Ursache dieser Aenderung der Richtung für einen und denselben Ort läßt sich, wie es scheint, durch die Feuchtigkeit des Bodens erklären, und zwar je trockener der Boden ist (wie es in Sofia im September 1894 der Fall war), desto mehr nähert sich die Richtung des Erdstromes dem magnetischen Meridian.

Der Erdstrom zeigt im Allgemeinen die periodische Variation: Morgens erreicht derselbe das Minimum und Abends das Maximum. Diese täglichen Variationen sind denjenigen der Lufttemperatur sehr ähnlich.

Die Potential-Differenz für den Erdstrom bei einer Entfernung zwischen den Elektroden von 50 Meter war in Sofia, Lom-Palanka und Rustschuk im Maximum circa 0,01 Volt, während sie in Petrohan 5 Mal größer war.

In den gebirgigen Gegenden fließt der Erdstrom von unten nach oben, was mit den Beobachtungen von B r a n d e r auf dem St.-Gotthard und von P a l m i e r i auf dem Vesuv übereinstimmt;

dagegen in niedrigen künstlichen Hügeln wird diese herrschende Richtung nicht beobachtet.

Während eines Erdbebens zeigt der Erdstrom eine starke Aenderung seiner Intensität, jedoch ist dieselbe nach allen Richtungen hin nicht von gleicher Stärke. Der Erdstrom zeigt dabei die Perturbationen noch längere Zeit (einige Stunden), nachdem das Erdbeben scheinbar schon aufgehört haben sollte.

Die Aenderung der Ruhelage der Magnetnadel in dem Magnetometer ist nicht identisch mit den Variationen des Erdstromes, obwohl man das fast gleichzeitige Vorkommen der Perturbationen dieser beiden Größen nicht ableugnen kann. Es sei jedoch dabei bemerkt, daß die magnetischen Perturbationen etwas früher eintreten, als diejenigen der elektrischen, welcher Umstand sich in Widerspruch mit den Beobachtungen anderer Physiker befindet (z. B. Wild).

Diese Abhandlung hat den Charakter einer vorläufigen Mittheilung; eine ausführlichere Beschreibung dieser Untersuchung beabsichtige ich später zu veröffentlichen.

Sofia, November 1894.

Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes auf Formenscharen, die sich bei Umläufen auf einer Riemann'schen Fläche linear substituiren.

Von

E. Ritter in Göttingen.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 8. December 1894.)

I. Definitionen.

Auf einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte p soll eine Formenschar existiren, die sich aus n linear unabhängigen Zweigen in der Gestalt

$$\Pi = c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + \cdots + c_n \Pi_n$$

zusammensetzt, und folgende Eigenschaften hat:

1) Sie soll auf dem algebraischen Gebilde überall unverzweigt sein mit Ausnahme der Umgebung von s singulären Punkten $e_i (i = 1, 2, \cdots s)$.

2) Wenn die unabhängigen Variablen z_1, z_2 einen der $2p$ unabhängigen Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) durchlaufen oder einen Umlauf S_i um einen der singulären Punkte e_i ausführen, so sollen die Zweige Π_1, Π_2, .. Π_n je eine homogene lineare Substitution $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, S_i erleiden.

3) Die Formenschar soll nirgends eine wesentlich singuläre Stelle haben und soll in den Punkten e_i angebbare endliche Exponenten λ_{i1}, λ_{i2}, λ_{in} besitzen, d. h. es soll n linear unabhängige Combinationen der n Zweige geben, welche in den Ordnungen λ_{i1}, λ_{i2}, .. λ_{in} verschwinden.

Formenscharen, die zum selben algebraischen Gebilde mit denselben singulären Punkten gehören und in den Substitutionen S_i genau, in den Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ bis auf simultane Multiplicationen aller Zweige mit je derselben Constanten übereinstimmen,

nenne ich „verwandt“ oder zur selben „Formenclasse“ gehörig.

Neben irgend einem Substitutionensystem $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ kommen in der Classe auch alle diejenigen Substitutionensysteme vor, welche sich von dem ersten durch simultane Multiplicationen mit beliebigen Constanten unterscheiden. Ein solches dieser Systeme $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, dessen Substitutionen sämtlich die Determinante 1 haben, lege ich als „Normalsubstitutionensystem“ zu Grunde.

Von irgend einer Formenschar der Classe sage ich dann, sie besitze das Multiplicatorsystem $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, wenn sich ihre Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ von den entsprechenden Normalsubstitutionen um simultane Multiplicationen mit $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ unterscheiden.

Die entsprechenden Exponenten zweier verwandten Formenscharen an den Stellen e_i können sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Irgend ein bestimmtes der so möglichen Exponentensysteme bezeichne ich als „Normalexponentensystem“.

Eine von den e_i verschiedene Stelle nenne ich eine $l$fache Nullstelle der Formenschar, wenn daselbst alle Zweige mindestens in der Ordnung l verschwinden, eine $l$fache Unendlichkeitstelle, wenn mindestens ein Zweig in der Ordnung l unendlich wird.

Eine Stelle e_i heißt eine $l$fache Nullstelle, wenn sämtliche Exponenten an der Stelle um mindestens l größer sind, als die entsprechenden Normalexponenten, eine $l$fache Unendlichkeitstelle, wenn mindestens ein Exponent um l kleiner ist, als der entsprechende Normalexponent.

Eine „ganze Formenschar“ ist eine solche, welche keine Unendlichkeitstellen besitzt. Man kann jede Formenschar durch Multiplication mit einem geeigneten Product von multiplicativen Primformen [1]) in eine ganze Formenschar verwandeln.

Man kann auf unendlich viele Arten n ganze Formenscharen

$$\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$$

der Classe finden, durch welche sich alle übrigen in der Gestalt

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \ldots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

darstellen lassen, unter φ_ν multiplicative Formen von den Graden $\delta - \delta_\nu$ und den Multiplicatoren $\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_\varkappa^{(\nu)}}$, $\frac{\beta_\varkappa}{\beta_\varkappa^{(\nu)}}$ verstanden, wenn δ den

1) Man vergleiche über alles, was sich auf die Theorie der multiplicativen Formen bezieht, meine Arbeit in Math. Ann. Bd. 44. 1893.

Grad, $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ das Multiplicatorsystem der Formenschar Π, δ_ν den Grad, $\alpha_\varkappa^{(\nu)}$, $\beta_\varkappa^{(\nu)}$ das Multiplicatorsystem der Formenschar $\Pi^{(\nu)}$ bezeichnet. Den Grad aller Formen und Formenscharen messe ich dabei stets in multiplicativen Primformen.

Ein solches System von n ganzen Formenscharen, das diese Eigenschaft hat, nenne ich eines „Basis“ der Formenclasse.

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ sämtlich ganze Formen sind, so ist auch Π eine ganze Formenschar.

Aber es kann Π sehr wohl auch dann eine ganze Formenschar sein, wenn die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ Unendlichkeitstellen besitzen.

Solche Stellen, an denen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ unendlich werden können, ohne daß die dargestellte Formenschar unendlich zu werden braucht, nenne ich „Ausnahmepunkte“ der Basis.

Eine Basis ohne Ausnahmepunkte, durch welche sich also sämtliche ganze Formenscharen der Classe mit Hülfe ganzer Coefficienten darstellen, nenne ich eine „Minimalbasis“.

Im Falle $p = 0$ läßt sich die Existenz einer Minimalbasis allgemein beweisen.

II. Die Ausnahmepunkte einer Basis.

Die Formenscharen $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ von den Graden $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ mögen eine Basis bilden.

$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ seien die zum Punkte e_i gehörigen Normalexponenten, ihre Summe $\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{in}$.

Zur Vermeidung von Weitläufigkeiten sei im Folgenden der Fall ausgeschlossen, daß zwei Exponenten eine ganzzahlige Differenz haben, ohne daß einem derselben ein Zweig mit logarithmischen Gliedern in der Entwicklung entspräche.

Nach Ausschluß dieses Falls ist

$$\begin{vmatrix} \Pi_1' & \Pi_1'' & \ldots & \Pi_1^{(n)} \\ \Pi_2' & \Pi_2'' & & \Pi_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Pi_n' & \Pi_n'' & \ldots & \Pi_n^{(n)} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i} \cdot F_q(z_1, z_2),$$

unter F_q eine gewisse unverzweigte ganze multiplicative Form vom Grade

$$q = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \delta_\nu - \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i$$

verstanden.

Die Nullstellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ der Form F_q sind gerade die Ausnahmestellen der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$.

Die Bedeutung einer mehrfachen Ausnahmestelle, d. h. eines mehrfachen Nullpunktes von F_q, für die Darstellung einer ganzen Formenschar durch die Basis ist durch folgende Sätze zu characterisieren:

Die Gesamtdeterminante verschwinde an der Stelle y in der Ordnung $k = k_1$, die sämtlichen ersten Unterdeterminanten mindestens in der Ordnung k_2, die zweiten Unterdeterminanten mindestens in der Ordnung k_3 u. s. w., die $(\nu_1 - 1)$ten Unterdeterminanten mindestens in der Ordnung k_{ν_1}, während die $\nu_1$ten Unterdeterminanten nicht mehr sämtlich verschwinden; dabei ist notwendig

$$k = k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_{\nu_1} > 0.$$

Es sei ν_1 die Anzahl aller dieser Zahlen, ν_2 die Anzahl derjenigen von ihnen, welche $> \nu_1$ sind, ν_3 die Anzahl derer, die $> \nu_1 + \nu_2$ sind u. s. w., endlich $\nu_\varkappa$ die Anzahl der Zahlen, welche $> \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{\varkappa-1}$ sind, während keine Zahl mehr $> \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varkappa$ ist; es ist notwendig

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varkappa = k.$$

Dann können in der Darstellung einer ganzen Formenschar:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

die φ_ν an der Stelle y bis zur Ordnung $\varkappa$ unendlich werden.

Die $n\varkappa$ Coefficienten des Unendlichwerdens der φ_ν enthalten zusammen genau k willkürliche Constanten linear und homogen; von diesen willkürlichen Constanten kommen in den $\varkappa$fach unendlich werdenden Entwicklungsgliedern nur $\nu_\varkappa$ vor, in den $(\varkappa - 1)$fach unendlich werdenden Gliedern neben den $\nu_\varkappa$ ersten Constanten noch $\nu_{\varkappa-1}$ weitere, in den $(\varkappa - 2)$fach unendlich werdenden Gliedern weitere $\nu_{\varkappa-2}$ Constanten u. s. w.

Zwei Specialfälle sind für das folgende besonders wichtig:

1) $k = 1$.

Die φ_ν können je einfach unendlich werden mit Coefficienten, die in dem wohlbestimmten Verhältnis stehen müssen:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = A_1 : A_2 ; \ldots : A_n ,$$

wo die A den nicht durchweg verschwindenden zu einer Zeile gehörigen Unterdeterminanten der Determinante $|\Pi_\nu^{(\mu)}(y_1, y_2)|$ proportional sind.

2) $k = n-1$, $k_2 = n-2, \ldots k_{n-1} = 1$.

Die φ_ν können je einfach unendlich werden mit Coefficienten, die der einzigen wohlbestimmten Gleichung

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0$$

genügen müssen, wo die A den nicht durchweg verschwindenden Gliedern einer Zeile der Determinante $|\Pi_\nu^{(\mu)}(y_1, y_2)|$ proportional sind.

Es besteht ferner der Satz:

Man kann stets eine Basis mit nur einfachen Ausnahmepunkten finden.

III. Reciproke Formenscharen.

Nachdem ich, den s Punkten e_i entsprechend irgend welche s Zahlen μ_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ ausgewählt habe, nenne ich zwei Formenscharen Π und Ω „reciproke Formenscharen", wenn ihre Grade δ, δ' und ihre Substitutionen in solcher Beziehung stehen, daß eine Identität besteht:

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n = \prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\mu_i} \cdot \Phi ,$$

unter Φ eine derjenigen multiplicativen Formen vom Grade $2p-2$ verstanden, welche in kanonischen Variablen z_1, z_2 algebraisch sind.

Die reciproken Formenscharen zu allen Formenscharen einer Classe bilden wieder eine Classe, die „reciproke Formenclasse".

Die Normalexponenten $\lambda'_{i1}, \lambda'_{i1}, \ldots \lambda'_{in}$ der reciproken Classe sollen so gewählt sein, daß immer

$$\lambda_{i1} + \lambda'_{i1} = \lambda_{i2} + \lambda'_{i2} = \cdots = \lambda_{in} + \lambda'_{in} = \mu_i$$

ist.

Wenn eine Basis Π', Π'', $\ldots \Pi^{(n)}$ der einen Classe bekannt ist, so kann man daraus stets auf einfachste Weise eine Basis der reciproken Classe bilden.

Man bilde nämlich die ersten Unterdeterminanten des Schemas

$$\begin{matrix} \Pi_1' \Pi_1'' & \ldots & \Pi_1^{(n)} \\ \Pi_2' \Pi_2'' & & \Pi_2^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Pi_n' \Pi_n'' & \ldots & \Pi_n^{(n)} \end{matrix}$$

und multiplicire dieselben jede mit $\prod_{i=1}^{i=s} P(z\,e_i)^{\mu_i - \lambda_i}$; bezeichne ich die so erhaltenen Formen mit

$$\begin{matrix} \Omega_1' \Omega_1'' & \ldots & \Omega_1^{(n)} \\ \Omega_2' \Omega_2'' & & \Omega_2^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_n' \Omega_n'' & \ldots & \Omega_n^{(n)}, \end{matrix}$$

und fasse $\Omega_1^{(\mu)}, \Omega_2^{(\mu)}, \ldots \Omega_n^{(\mu)}$ als Zweige einer Formenschar $\Omega^{(\mu)}$ auf, so bilden $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ thatsächlich eine Basis der reciproken Formenclasse.

Wenn die Determinante der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\lambda_i} F_q(z_1, z_2)$$

ist, so heißt die Determinante der Basis $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$

$$\prod_{i=1}^{i=s} (z e_i)^{\lambda_i'} (F_q(z_1, z_2))^{n-1}.$$

Es besteht der Satz:

Wenn die Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ nur einfache Ausnahmepunkte hat, so sind dies für die Basis Ω', $\Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ zwar $(n-1)$fache Ausnahmepunkte, aber von der Art des am Schlusse des vorigen Abschnitts hervorgehobenen Specialfalls.

Wenn irgend eine Formenschar der einen Classe die Gestalt hat:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)} = \frac{\psi_1}{F_q} \Pi' + \frac{\psi_2}{F_q} \Pi'' + \cdots + \frac{\psi_n}{F_q} \Pi^{(n)},$$

so haben alle zu Π reciproken Formenscharen die Gestalt:

$$\Omega = \frac{\varphi_1'}{F_q} \cdot \Omega' + \frac{\varphi_2'}{F_q} \Omega'' + \cdots + \frac{\varphi_n'}{F_q} \Omega^{(n)} = \psi_1' \Omega' + \psi_2' \Omega'' + \cdots + \psi_n' \Omega^{(n)},$$

unter φ_ν, φ_ν' und ψ_ν, ψ_ν' immer zu einander reciproke multiplicative Formen verstanden.

Es ist dann

$$\Pi_1\Omega_1 + \Pi_2\Omega_2 + \cdots + \Pi_n\Omega_n = \prod_{i=1}^{i=n} P(ze_i)^{\mu_i}\cdot(\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2' + \cdots + \varphi_n\varphi_n').$$

Ferner ergibt sich aus den Sätzen zu Ende des vorigen Abschnittes, wenn wir berücksichtigen, daß die Unterdeterminanten des Systems $|\Pi_\nu^{(\mu)}|$ gerade den $\Omega_\nu^{(\mu)}$ proportional sind:

Soll Π an einer Ausnahmestelle y endlich bleiben, so müssen die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des Unendlichwerdens von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bei y der Proportion genügen

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = \Omega'(y_1, y_2) : \Omega''(y_1, y_2) : \ldots : \Omega^{(n)}(y_1, y);$$

soll andererseits Ω bei y endlich bleiben, so müssen die Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ des Unendlichwerdens von $\psi_1', \psi_2', \ldots \psi_n'$ der Gleichung genügen

$$\beta_1\Omega'(y_1, y_2) + \beta_2\Omega''(y_1, y_2) + \cdots + \beta_n\Omega^{(n)}(y_1, y_2) = 0,$$

oder

$$\varphi_1'(y_1, y_2)\Omega'(y_1, y_2) + \varphi_2'(y_1, y_2)\Omega''(y_1, y_2) + \cdots + \varphi_n'(y_1, y_2)\Omega^{(n)}(y_1, y_2) = 0.$$

IV. Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes auf Formenscharen.

1) Riemann-Roch'scher Satz für ganze Formenscharen.

Es ist die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer ganzen Formenschar Π von vorgegebenem Grade δ und von vorgegebenem Multiplicatorsystem zu bestimmen.

In $$\Pi = \varphi_1\Pi' + \varphi_2\Pi'' + \cdots + \varphi_n\Pi^{(n)}$$

dürfen die φ_μ an den q Ausnahmestellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ je einfach unendlich werden mit Coefficienten von der Gestalt

$$\alpha'\Omega^{(\mu)}(y_1', y_2'),\ \alpha''\Omega^{(\mu)}(y_1'', y_2''),\ \ldots\ \alpha^{(q)}\Omega^{(\mu)}(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}).$$

In jeder einzelnen Form φ_μ müssen aber die Coefficienten der Unendlichkeitstellen den für multiplicative Formen geltenden linearen Bedingungsgleichungen gehorchen (Math. Ann. Bd. 44 S. 315):

$$\alpha'\Omega^{(\mu)}(y_1', y_2')\cdot\varphi_\mu'(y_1', y_2') + \alpha''\Omega^{(\mu)}(y_1'', y_2'')\varphi_\mu'(y_1'', y_2'') + \cdots$$
$$+ \alpha^{(q)}\Omega^{(\mu)}(y_1^{(q)}, y_2^{(q)})\varphi_u'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0,$$

worin für φ_μ' der Reihe nach sämtliche linear unabhängige zu φ_u reciproke ganze multiplicative Formen einzusetzen sind, deren Anzahl $\mathfrak{G}_u'$ sein möge.

Man erhält so für die q Coefficienten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ im ganzen $\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \mathfrak{S}'_\mu$ lineare homogene Gleichungen. Es mögen $\mathfrak{S}'$ dieser Gleichungen identische Folge der übrigen sein.

Dann ist die Anzahl der willkürlichen Coefficienten in den Unendlichkeitstellen

$$q - \sum \mathfrak{S}'_\mu + \mathfrak{S}'.$$

Außerdem aber kann man zu jeder der Formen φ_μ noch eine beliebige ganze Form des betreffenden Grades und Multiplicatorsystems hinzufügen. Bezeichnet also $\mathfrak{S}_\mu$ die Anzahl der linear unabhängigen ganzen φ_μ, so ist die Gesamtzahl $\mathfrak{S}$ der willkürlichen Constanten in einer ganzen Formenschar Π:

$$\mathfrak{S} = \sum \mathfrak{S}_\mu + q - \sum \mathfrak{S}'_\mu + \mathfrak{S}'.$$

Nun folgt aus dem für ganze multiplicative Formen geltenden Riemann-Roch'schen Satz (Math. Ann. 44 S. 314):

$$\mathfrak{S}_\mu = \delta - \delta_\mu - p + 1 + \mathfrak{S}'_\mu.$$

Also ist, wenn ich berücksichtige, daß $\sum \delta_\mu = q + \sum \lambda_i$ ist:

$$\mathfrak{S} = n(\delta - p + 1) - \sum \lambda_i + \mathfrak{S}'.$$

Die Anzahl $\mathfrak{S}'$ der zwischen den Gleichungen für $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ bestehenden Identitäten ist näher zu präcisiren.

Bildet man die allgemeinste lineare Combination dieser $\sum \mathfrak{S}'_\mu$ Gleichungen, so hat diese die Gestalt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \alpha^{(\varkappa)} \big(\varphi'_1(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega'(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)}) + \varphi'_2(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega''(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)}) + \cdots$$
$$+ \varphi'_n(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega^{(n)}(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\big) = 0,$$

unter φ'_μ die allgemeinste $\mathfrak{S}'_\mu$ willkürliche Constanten enthaltende zu φ_μ reciproke ganze multiplicative Form verstanden; die $\sum \mathfrak{S}'_\mu$ Combinationscoefficienten sind gerade die $\sum \mathfrak{S}'_\mu$ willkürlichen Coefficienten in den φ'_μ.

Die Anzahl der linear unabhängigen Identitäten zwischen den $\sum \mathfrak{S}'_\mu$ Gleichungen ist daher genau gleich der Anzahl der willkürlichen Coefficienten in denjenigen ganzen φ'_μ, welche den q Gleichungen genügen

$$\varphi'_1(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega'(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)}) + \varphi'_2(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega''(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)}) + \cdots$$
$$+ \varphi'_n(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)})\, \Omega^{(n)}(y_1^{(\varkappa)}, y_2^{(\varkappa)}) = 0.$$

Dies ist aber nach dem Schlusse des vorigen Abschnitts genau die Anzahl der linear unabhängigen zu Π reciproken ganzen Formenscharen. Wir haben also den Satz:

Die Anzahl $\mathfrak{S}$ der linear unabhängigen ganzen Formenscharen von gegebenem Grade δ und von gegebenem Multiplicatorsystem ist

$$\mathfrak{S} = n(\delta - p + 1) - \sum \lambda_i + \mathfrak{S}',$$

unter $\mathfrak{S}'$ die Anzahl der linear unabhängigen reciproken ganzen Formenscharen verstanden.

Die Gleichung läßt sich vermöge der Beziehungen

$$\delta + \delta' = 2p - 2 + \sum \mu_i, \quad \sum \lambda_i + \sum \lambda_i' = n \cdot \sum \mu_i$$

auch in der reciproken Gestalt schreiben:

$$\mathfrak{S}' = n(\delta' - p + 1) - \sum \lambda_i' + \mathfrak{S}.$$

Der ausgesprochene Satz ist die Verallgemeinerung des für algebraische Functionen geltenden Brill-Noether'sehen Reciprocitätssatzes.

2) Riemann-Roch'scher Satz für Formenscharen mit Unendlichkeitstellen.

Aus dem Rieman-Roch'schen Satz für ganze Formenscharen folgt ohne Schwierigkeit der allgemeinere Satz:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Formenscharen von gegebenem Grade δ und von gegebenem Multiplicatorsystem, welche an ε vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist

$$n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum \lambda_i + \tau'$$

unter τ' die Anzahl aller linear unabhängigen ganzen reciproken Formenscharen verstanden, welche an den sämtlichen zugelassenen Unendlichkeitstellen verschwinden.

Diese beiden Sätze sind für die Theorie der verwandten Differentialgleichungen in gleicher Weise grundlegend, wie der gewöhnliche Riemann-Roch'sche Satz für die Theorie der algebraischen Functionen.

Ich bemerke noch, daß man an die genannten beiden Sätze genau dieselben Folgerungen knüpfen kann, wie an die entsprechenden Sätze in der Theorie der multiplicativen Formen.

Z. B. kann man die linearen Relationen explicit hinschreiben,

welchen die $n\varepsilon$ Coefficienten der ε Unendlichkeitsstellen einer Formenschar genügen müssen, indem in dieselben die ganzen reciproken Formenscharen in derselben Weise eintreten, wie bei den multiplicativen Formen die ganzen reciproken Formen.

Ferner gründet sich hierauf eine Darstellung aller unendlich werdenden Formenscharen durch Elementarscharen mit nur je einer variablen Unendlichkeitstelle, genau wie bei den multiplicativen Formen.

Und wie die multiplicativen Formen die algebraische Grundlage für das Studium der automorphen Formen sind, so meine jetzt ausgesprochenen Sätze für die Untersuchung der homomorphen Formenscharen, d. h. der Formenscharen, welche bei homogenen linearen Substitutionen der unabhängigen Variablen selbst homogene lineare Substitutionen erleiden.

Göttingen, November 1894.

Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen.

Von

A. Sommerfeld.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 8. December 1894.)

Das Thema der folgenden Mitteilung lautet, physikalisch ausgedrückt: zur Beugungstheorie; mathematisch ausgedrückt, würde es heißen: zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf einer Riemann'schen Fläche. Indem ich alle Ausführungen bis auf eine spätere Publication verschiebe, möchte ich hier im Wesentlichen nur auseinandersetzen, inwiefern beide Fragestellungen identisch sind.

Wir betrachten die Beugungserscheinungen, welche durch einen beliebigen Schirm S von verschwindender Dicke hervorgerufen werden. Dabei meinen wir nicht nur die Beugung des Lichtes, sondern auch die Beugung elektrischer Wellen, und zwar die letztere um so lieber, als die gewöhnliche Theorie für diese Wellen mit großer Wellenlänge völlig versagt, während die unsrige gerade für sie besonders geeignete Ausdrücke liefert. Uebrigens erstreckt sich unsere Theorie auch auf akustische Wellen; da bei ihnen aber die Darstellung etwas modificirt werden müßte, schließen wir sie der Kürze halber aus. Die Terminologie wollen wir der Optik entlehnen.

Wir setzen einfarbiges Licht von der Schwingungsdauer τ und stationären Zustand voraus. Statt der eigentlichen Componenten des Lichtes können wir drei Functionen U, V, W betrachten, welche von t unabhängig sind und aus denen sich die Componenten nach der x, y, z-Richtung berechnen als $\Re\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} U\right)$, $\Re\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} V\right)$, $\Re\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} W\right)$. Wir nehmen an, der Schirm sei ein vollkommener

Leiter für die betr. Wellenbewegung. Dann müssen die in die Fläche des Schirmes fallenden Componenten verschwinden. Diese Bedingung gilt bei der Annäherung an S von beiden Seiten her. Es können daher die Componenten selbst beim Durchgang durch S stetig sein. Ueber die Differentialquotienten nach der Normalen aber ist zunächst nichts vorgeschrieben. Diese werden im Allgemeinen einen Sprung erleiden. Als eindeutige Functionen des Raumes aufgefaßt, verlieren die Functionen U, V, W in Punkten von S ihren analytischen Charakter.

Ueberall, wo es sich in dieser Weise um nicht-analytische Functionen handelt, wird man die analytischen Fortsetzungen derselben bilden und dadurch zu einer besseren Einsicht in das Wesen der Functionen gelangen. Wir behaupten, daß die nach der einen und der anderen Seite gebildeten Fortsetzungen identisch werden, wenn der Schirm eben ist.

Die Ebene des Schirmes sei die Y, Z-Ebene; seine Randcurve bezeichnen wir mit C. In diesem Falle bestehen für W die folgenden Bedingungsgleichungen: a) W genügt der Differentialgleichung $\Delta W + k^2 W = 0$. b) W verschwindet in den Punkten von S. c) W ist im ganzen Raume endlich außer in einem Punkte P, dem „leuchtenden“, wo W wie $1/r$ unendlich wird. d) W verschwindet im Unendlichen. Die Constante k bezeichnen wir als „reciproke Wellenlänge“, obwohl das Wort Wellenlänge nur für den speciellen Fall ebener Wellen einen direkten Sinn hat. Dieselben Bedingungen bestehen für die Function V; U ist dann vermöge der Incompressibilitätsbedingung mitbestimmt.

Wir sprechen von einem Riemann'schen Doppelraume. Wir denken uns nämlich den dreidimensionalen Raum in zwei Exemplaren angefertigt, welche wir beide längs der Fläche von S aufschneiden und wechselweise an einander fügen. Die Randcurve C bildet für diesen Doppelraum eine Verzweigungscurve. Wir nehmen an, es giebt eine Function u, welche in diesem Doppelraum eindeutig ist, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt, im Undenklichen verschwindet und in dem einen Punkt P des Doppelraumes einen Pol besitzt, während sie an der Stelle $\overline{P}$ in dem anderen Exemplare des Raumes endlich bleibt. Diese Function bezeichnen wir als Hauptlösung in dem Doppelraum. Um die Abhängigkeit von der Lage des Poles zu verdeutlichen, mögen wir sie als $u(P)$ schreiben.

Wir construiren nun den Spiegelpunkt P' von P in Bezug auf die Ebene von S — dieser fällt, wenn P in dem ersten Exem-

plare des Raumes liegt, in das zweite — und bilden die Differenz $u' = u(P) - u(P')$. Diese genügt allen Bedingungen, welche für V und W gestellt sind. Denn sie wird in dem ersten Exemplare des Raumes nur an der einen Stelle P unendlich und sie verschwindet in den Punkten von S aus Symmetrierücksichten. Daß auch die Bedingungen a) und d) erfüllt sind, ist evident. Es folgt, daß die Functionen V und W mit so gebildeten Functionen u' identisch werden und, ebenso wie diese, bei analytischer Fortsetzung in dem Doppelraume eindeutig sind. Man bemerke übrigens, daß u' nicht auch gleichzeitig in den Punkten A der Y, Z-Ebene, welche im ersten Raumexemplare außerhalb C liegen, zu Null wird. Der Weg von P' nach A ist nämlich gewissermaßen länger als der Weg von P nach A, da man von P' aus nur durch das Innere von C hindurch nach A gelangen kann. Es liegen eben nur die Punkte der Y, Z-Ebene innerhalb C, nicht auch die Punkte außerhalb C, symmetrisch zu P und P'.

Wollen wir exakte Lösungen eines Beugungsproblemes haben, so werden wir mit der Aufstellung der Hauptlösung $u(P)$ beginnen. Unser Verfahren läßt sich kurz so charakterisiren: Da der Spiegelungsprocess in dem gewöhnlichen Raume keinen Platz hat, so construiren wir einen Doppelraum, in dem er möglich wird.

Bei der Aufstellung der Hauptlösungen wird man mit dem einfachsten Falle beginnen, wo die Lichtbewegung von einer Coordinate (z) unabhängig ist und dementsprechend S eine specielle Gestalt hat. Der Riemann'sche Raum reducirt sich dann auf eine Riemann'sche Fläche; von der Verzweigungscurve C kommen nur die Schnittpunkte mit der X, Y-Ebene in Betracht, welche Verzweigungspunkte im gewöhnlichen Sinne werden. Die Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Wie wir sehen, kommen wir auch in der Optik um die Lösung von Randwertaufgaben, dem allgemeinen Probleme der mathematischen Physik, nicht herum. Bei der gewöhnlichen Behandlung der Optik verfährt man nun bekanntlich ganz anders.

Man leitet nur eine kleine Zahl von Functionen aus dem Wesen des Lichtes, d. h. aus den Differentialgleichungen der Optik, ab und führt die allgemeineren Probleme auf diese nach sog. geometrischen Methoden zurück. Dieses Verfahren hat seinen Grund in der Kleinheit der Wellenlänge. In der That, wenn k unend-

lich groß wird, so verlieren die optischen Differentialgleichungen ihren Sinn und hören auf, Bedingungen darzustellen, durch welche die Größe des Lichtvectors in einem Punkte aus seinem Verhalten in anderen Punkten bestimmt würde. Durch einen Grenzübergang läßt sich zeigen, daß dann das Licht in einzelne Strahlen zerlegt werden kann, welche sich unabhängig von einander mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Man kommt so zu einer Auffassunng, welche gewissermaßen den Anschauungen der Emissionstheorie entspricht, wo man ja voraussetzt, daß die Lichtpartikelchen in geradlinigen Bahnen fortgeschleudert werden, ohne auf einander Wechselwirkungen auszuüben. Während man theoretisch allgemein die Undulationstheorie angenommen hat, ist die wirkliche Behandlung der optischen Probleme in mancher Hinsicht auf dem Standpunkte der Emissionstheorie stehen geblieben.

Von diesem Standpunkte aus sind Beugungserscheinungen zunächst unmöglich. Trotzdem werden solche hinterher auf Grund des Huyghens'schen Principes abgeleitet. Dieses Princip ist an sich völlig exakt, nicht exakt aber ist seine Anwendung auf die Beugungstheorie, auch nicht nach der etwas verschärften Methode von Kirchhoff. Will man nach dem Huyghens'schen Principe z. B. die Componente von U berechnen, so müssen die Werte von U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf dem Beugungsschirme bekannt sein. Man nimmt nun diejenigen Werte an, welche sich bei unendlich kleiner Wellenlänge ergeben würden, wählt also auf der beleuchteten Seite des Schirmes U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ so, als ob der Schirm nicht vorhanden wäre und setzt auf der entgegengesetzten Seite $U = 0$ und $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Im Schlußresultate aber sieht man die Wellenlänge als endlich an. Die obigen Grenzbedingungen sind nun bei endlicher Wellenlänge durchaus unzulässig. Denn sie enthalten Unstetigkeiten, welche bei der Ableitung des Huyghens'schen Principes ausdrücklich ausgeschlossen werden; ferner folgt aus $U = 0$ und $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ nach einem bekannten Satze, daß U identisch im ganzen Raume verschwinden müßte. Es ist sehr merkwürdig, daß trotz dieser erheblichen Bedenken die Formeln so gut die Beobachtungen wiedergeben.

Verlassen wird das gewöhnliche Verfahren zum ersten Male in einer Arbeit des Herrn Poincaré. Hier wird das Beugungs-

problem als das, was es ist, nämlich als Randwertaufgabe aufgefaßt. Durchgeführt wird es allerdings auch hier nur für unendlich kleine Wellenlängen.

Die wirkliche Aufstellung der Hauptlösungen scheint in complicirteren Fällen große Schwierigkeiten zu haben. Es versagt bei unserer Differentialgleichung die Abbildungsmethode, durch welche bei der Gleichung $\Delta u = 0$ die entsprechenden Functionen leicht abgeleitet werden können. Dagegen bleibt die Methode der Potenzreihen hier anwendbar mit dem Unterschiede, daß die Potenzen durch Bessel'sche Functionen ersetzt werden. In einem gewöhnlichen Punkte der Riemann'schen Fläche haben wir nämlich die Entwickelung

$$\Sigma J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

und in einem $(m-1)$-fachen Windungspunkte:

$$\Sigma J_{n/m}(kr)\left(A_n \cos \frac{n}{m}\varphi + B_n \sin \frac{n}{m}\varphi\right).$$

Diese Reihen convergiren genau so, wie die entsprechenden Reihen der Potentialtheorie

$$\Sigma r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

bez.

$$\Sigma r^{n/m}\left(A_n \cos \frac{n}{m}\varphi + B_n \sin \frac{n}{m}\varphi\right)$$

bis an den nächsten singulären Punkt heran.

Der einfachste Fall einer Riemann'schen Fläche mit nur einem Windungspunkte im Endlichen läßt sich vollkommen erledigen. Die Reihen bilden hier nur einen Durchgangspunkt, das Resultat läßt sich in die bequeme Form bestimmter Integrale bringen. Hier behandle ich auch ein Problem, welches bei Herrn Poincaré unerledigt bleibt, nämlich die Beugung an einem Schirm von endlicher Absorptionsfähigkeit.

Die Rechnungen sind bis zum Vergleich mit den Beobachtungen durchgeführt. Es zeigt sich eine recht erfreuliche Uebereinstimmung. Die Formeln der gewöhnlichen Beugungstheorie erscheinen als mehr oder minder gute Annäherungen an unsere exakten. Desgleichen zeigen die Gleichungen des Herrn Poincaré trotz der Verschiedenheit der Ausgangspunkte, eine bemerkenswerte Aehnlichkeit mit den unsrigen.

Piëzo- und Pyroelectricität, diëlectrische Influenz und Electrostriction bei Krystallen ohne Symmetriecentrum.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. December 1894.

Die Grundlagen zu einer allgemeinen Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen habe ich in einer Abhandlung über diesen Gegenstand vor vier Jahren[1]) zu geben mich bemüht, und da die Beobachtungen mit den daraus gezogenen Folgerungen übereinstimmen, auch principielle Widersprüche von keiner Seite erhoben sind, so darf ich dieselben als bisher unerschüttert betrachten. In den Anwendungen habe ich mich aber auf eine Annäherung beschränkt, die durch gewisse Beobachtungen gerechtfertigt erschien und darin bestand, daß ich bei der Bestimmung der Erregung eines Krystalles nur die directen Einwirkungen der Deformationen resp. der Temperaturänderungen in Rechnung zog, die indirecten dagegen, nämlich die electrischen und mechanischen Wirkungen, welche die primär erregte electrische Vertheilung ihrerseits übt, vernachlässigte. Eine Berücksichtigung derselben hätte principielle Schwierigkeiten nicht geboten, wohl aber die Resultate theilweise erheblich unübersichtlicher gemacht.

Nachdem aber durch die von Riecke und mir angestellten Beobachtungen[2]) eine Prüfung der Theorie in größerem Umfange als früher durchgeführt ist, scheint es angemessen, nun auch die strengen, allgemeinen Formeln der Piëzo- und Pyroelec-

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Eigenschaften der Krystalle. Abh. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 36, S. 1—99; 1890.

2) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 45, S. 523, 1892.

tricität und die damit in Verbindung stehenden der diëlectrischen Influenz und der Electrostriction für Krystalle ohne Symmetriecentrum aufzustellen, zu prüfen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit die frühere angenäherte Behandlung richtige Resultate zu liefern vermag, und zu untersuchen, welche Probleme einer strengen Behandlung zugänglich sind.

1) Ich gehe aus von der Annahme, die in der Literatur zuerst Duhem[1]) ausgesprochen hat, die ich aber unabhängig von ihm wenig später in meinen Vorlesungen als Ausgangspunkt für die Behandlung dieses Gebietes gemacht habe, dass die genannten electrischen Vorgänge vollständig umkehrbare seien, also ein thermodynamisches Potential besäßen.

Betrachten wir das Volumenelement eines erregbaren Krystalles, und bestimmen wir seinen Zustand durch die Werthe der sechs Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$, der Componenten der in ihm wirkenden electrischen Kraft X, Y, Z und der Temperatur τ, die wir sämmtlich von einem beliebigen Normalzustand aus rechnen, bezeichnen wir mit ξ das thermodynamische Potential oder die freie Energie, mit η die Entropie der Volumeneinheit, mit α, β, γ ihre electrischen Momente nach den Coordinatenaxen, mit $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ die Gesammtcomponenten der innern Drucke, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$
1)\quad \begin{aligned}
&-\frac{\partial \xi}{\partial X} = \alpha, \quad -\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \beta, \quad -\frac{\partial \xi}{\partial Z} = \gamma, \quad -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \eta, \\
&-\frac{\partial \xi}{\partial x_x} = \Xi_x, \quad -\frac{\partial \xi}{\partial y_y} = H_y, \ldots -\frac{\partial \xi}{\partial x_y} = \Xi_y.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt eine Reihe von Reciprocitätssätzen durch Elimination der Function ξ, z. B.

$$
2)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial \Xi_x}{\partial X} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_x}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial X} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_y}, \quad \frac{\partial \Xi_x}{\partial Y} = \frac{\partial \beta}{\partial x_x}, \ldots \\
&\frac{\partial \Xi_x}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial x_x}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial y_y}, \ldots \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial X}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial Y}, \ldots
\end{aligned}
$$

---

1) Duhem, Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme, T. II. p. 339 u. f. 1892.

Die beiden letzten Reihen dieses Systems gestatten, die Formel

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_x} dx_x + \cdots \frac{\partial \eta}{\partial x_y} dx_y + \frac{\partial \eta}{\partial X} dX + \frac{\partial \eta}{\partial Y} dY + \frac{\partial \eta}{\partial Z} dZ + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} d\tau$$

auf die Gestalt zu bringen:

3) $$d\eta = \frac{\partial \Xi_x}{\partial \tau} dx_x + \cdots \frac{\partial \Xi_y}{\partial \tau} dx_y + \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} dX + \frac{\partial \beta}{\partial \tau} dY + \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} dZ + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} d\tau.$$

Bezeichnet man mit T die τ entsprechende absolute Temperatur, so ist bekanntlich

4) $$T d\eta = d\omega$$

die mechanisch gemessene Wärmemenge, welche erforderlich ist, um der Volumeneinheit die durch $dx_x, \ldots dx_y, dX, dY, dZ, d\tau$ bestimmte Veränderung zu ertheilen, und

5) $$\frac{d\omega}{\varrho d\tau} = \Gamma,$$

worin ϱ die Dichte des Körpers bedeutet, die mechanisch gemessene specifische Wärme bei dem betrachteten Vorgang. Sind $dx_x, \ldots dx_y, dX, dY, dZ$ gleich Null, so sei Γ mit Γ_d bezeichnet und heiße die specifische Wärme bei constanter Deformation und constanter Influenz; es gilt dann ersichtlich

6) $$\Gamma_d = \frac{T}{\varrho} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{T}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}.$$

Von den Reciprocitätssätzen höherer Ordnung, die man leicht bilden kann, seien nur diejenigen erwähnt, welche Eigenschaften von Γ_d aussprechen; man erhält aus (6) und (2)

7) $$\frac{1}{T} \frac{\partial \varrho \Gamma_d}{\partial x_x} = \frac{\partial^2 \Xi_x}{\partial \tau^2}, \ldots$$
$$\frac{1}{T} \frac{\partial \varrho \Gamma_d}{\partial X} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2}, \ldots$$

2) Setzt man kleine Werthe der Variabeln $x_x, \ldots x_y, X, Y, Z, \tau$ voraus, so kann man für ξ eine Reihe nach steigenden Potenzen dieser Größen setzen und mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen. Nimmt man an, daß die Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, die Componenten X, Y, Z und die Entropie η mit den Argumenten verschwinden, so ist das niedrigste Glied von ξ eine quadratische Form. Wir beschränken uns auf dieses und setzen

$$
8)\quad \begin{aligned}
\xi = \varphi + f_d - \tfrac{1}{2} r \tau^2 \\
- \tau(q_1 x_x + \cdots + q_6 x_y) - \tau(r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \\
- X(\varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \cdots \varepsilon_{16} x_y) \\
- Y(\varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \cdots \varepsilon_{26} x_y) \\
- Z(\varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \cdots \varepsilon_{36} x_y).
\end{aligned}
$$

Hierin ist φ das rein elastische Potential oder die freie Energie bei constanter Influenz und constanter Temperatur; sein Werth folgt aus

$$
9)\quad \begin{aligned}
2\varphi = c_{11} x_x^2 + 2 c_{12} x_x y_y + \cdots\cdots + 2 c_{16} x_x x_y \\
+ c_{22} y_y^2 + \cdots\cdots + 2 c_{26} y_y x_y \\
+ c_{33} z_z^2 + \cdots + 2 c_{36} z_z x_y \\
+ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Die Constanten c_{hk} sind die isothermischen Elasticitätsconstanten des betrachteten Krystalles. f_d ist das rein diëlectrische Potential oder die freie Energie bei constanter Deformation und Temperatur; sein Werth folgt aus

$$
10)\quad -2 f_d = \beta_{11} X^2 + \beta_{22} Y^2 + \beta_{33} Z^2 + 2\beta_{23} YZ + 2\beta_{31} ZX + 2\beta_{12} XY,
$$

worin die β_{hk} Constanten bezeichnen.

Verstehen wir also unter $X_x, \ldots X_y$ die rein elastischen Drucke, welche bei constanter Influenz und Temperatur durch die Deformationen allein bewirkt werden, so ist

$$
11)\quad X_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_x},\ \ Y_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_y}, \ldots X_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_y};
$$

verstehen wir unter α_d, β_d, γ_d die rein electrisch erregten Momente, welche bei constanter Deformation und Temperatur durch die Influenz allein hervorgerufen werden, so ist

$$
12)\quad \alpha_d = -\frac{\partial f_d}{\partial X},\ \ \beta_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Y},\ \ \gamma_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Z}.
$$

Bei Einführung dieser Abkürzungen nehmen die allgemeinen Formeln (1) in Folge des Werthes (8) die Gestalt an

$$
13)\quad \begin{aligned}
\Xi_x = X_x + q_1 \tau + \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{21} Y + \varepsilon_{31} Z, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Xi_y = X_y + q_1 \tau + \varepsilon_{16} X + \varepsilon_{26} Y + \varepsilon_{36} Z;
\end{aligned}
$$

$$
14)\quad \begin{aligned}
\alpha = \alpha_d + \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \cdots + \varepsilon_{16} x_y + r_1 \tau, \\
\beta = \beta_d + \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \cdots + \varepsilon_{26} x_y + r_2 \tau, \\
\gamma = \gamma_d + \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \cdots + \varepsilon_{36} x_y + r_3 \tau;
\end{aligned}
$$

15) $$\eta = q_1 x + \cdots + q_6 x_y + r\tau + r_1 X + r_2 Y + r_3 Z.$$

Die innere Energie ε der Volumeneinheit hängt mit ξ und η durch die Formel zusammen

16) $$\varepsilon = \xi + \eta T;$$

hieraus folgt in unserm Falle, falls man $T - \tau = T_0$ setzt,

17) $$\begin{aligned} \varepsilon = \varphi + f_d + \tfrac{1}{2} r (T^2 - T_0^2) \\ + T_0 (q_1 x_2 + \cdots q_6 x_y) + T_0 (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \\ - X(\varepsilon_{11} x_x + \cdots + \varepsilon_{16} x_y) - Y(\varepsilon_{24} x_x + \cdots + \varepsilon_{26} x_y) \\ - Z(\varepsilon_{31} x_x + \cdots + \varepsilon_{36} x_y). \end{aligned}$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder zweiter Ordnung neben denen erster, so erhält man

18) $$\varepsilon = T_0 [(q_1 x_x + \cdots + q_6 x_y) + r\tau + (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z)],$$

oder unter Rücksicht auf (15)

$$\varepsilon = \eta T_0.$$

Die Constanten q_h heißen wegen der Art ihres Auftretens in (13) die Coefficienten des thermischen Druckes, die Constanten ε_{hk} wegen der Verbindung, die sie in (14) zwischen den electrischen Momenten und den Deformationsgrößen herstellen, die piëzoelectrischen Constanten. Die Größen r_h wären als die pyroelectrischen Constanten bei constanter Influenz und Deformation zu bezeichnen. Sie würden gleich Null zu setzen sein, wenn, wie verschiedene Beobachter geschlossen haben, eine directe Wirkung der Temperatur auf die electrischen Momente nicht existirt, die wahrgenommenen pyroelectrischen Erregungen also nur auf den durch die Temperaturänderungen bewirkten Deformationen beruhen. Ich habe mich in meiner ersten Abhandlung jenen Beobachtern angeschlossen, also die Constanten r_h nicht eingeführt, weil auf diese Weise die Theorie die denkbar einfachste Gestalt gewinnt. Wie wenig ich indessen dabei das Verschwinden der r_h für selbstverständlich oder durch die früheren Beobachtungen völlig sichergestellt betrachtete, zeigt der Umstand, daß die von Riecke und mir angestellten Messungen an Turmalin ganz speciell zu einer Prüfung dieser Verhältnisse benutzt worden sind. Diese Prüfung hat ergeben, daß jedenfalls bei Turmalin eine primäre pyroelectrische Erregung neben der secundären nicht sicher nachweisbar ist.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß der von mir eingenommene Standpunkt mit dem von Lord Kelvin[1]) vertretenen im Wesentlichen vollständig übereinstimmt. In der That habe ich auch in den oben genannten Vorlesungen die directen pyroelectrischen Wirkungen neben den indirecten zugelassen und die Theorie wesentlich in der Form behandelt, die hier mitgetheilt ist.

Für r erhält man aus (6) die Beziehung

$$19)\qquad r = \frac{\varrho \Gamma_d}{T};$$

hierin ist gemäß den eingeführten Vernachlässigungen für ϱ und T der bezügliche Anfangswerth ϱ_0 und T_0 zu setzen, sodaß sich Γ_d als eine Constante ergiebt.

Der in (13) gegebene Werth der Druckkräfte ist, streng genommen, unvollständig, weil bekanntlich die electrischen Kräfte innerhalb ponderabler Körper auch Spannungen ganz unabhängig von deren piëzoelectrischer Qualität, von deren Deformation oder Temperatur erregen. Diese müßten zu den obigen Werthen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ hinzugefügt werden, um die Gesammtdrucke $(\Xi_x), \ldots (\Xi_y)$ zu ergeben; sie würden das ganze Problem überaus compliciren, da sie Functionen zweiten Grades der X, Y, Z sind.

Zum Glück verlangt aber eben der letztere Umstand, daß wir sie bei unsern Entwickelungen, welche sich auf die Größen niedrigster Ordnung beschränken, vernachlässigen. Innerhalb der eingeführten Beschränkungen sind sonach die Werthe (13) als vollständig zu betrachten.

3) Für viele Anwendungen ist es vortheilhaft, die Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ statt der Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ als unabhängige Variable einzuführen.

Dazu benutzen wir, daß die isothermischen Elasticitätsmoduln s_{hk} mit den Constanten c_{hk} durch die Beziehungen verbunden sind

$$20)\qquad c_{1h} s_{1k} + c_{2h} s_{2k} + \cdots + c_{6h} s_{6k} \begin{cases} = 1 \text{ für } h = k, \\ = 0 \text{ für } h \lesseqgtr k. \end{cases}$$

Ferner führen wir neue Constanten a_h ein durch die Beziehungen

$$21)\qquad a_h = q_1 s_{1h} + q_2 s_{2h} + \cdots q_6 s_{6h} \text{ für } h = 1, 2 \ldots 6,$$

welchen entsprechen

$$22)\qquad q_h = a_1 c_{1h} + a_2 c_{2h} + \cdots a_6 c_{6h};$$

1) Lord Kelvin, Phil. Magazine (5), 36, p. 453. 1893.

endlich setzen wir

$$23)\quad \varepsilon_{h1} s_{k1} + \varepsilon_{h2} s_{k2} + \cdots + \varepsilon_{h6} s_{k6} = \delta_{hk} \quad \begin{array}{l}\text{für } h = 1, 2, 3 \\ \text{und } k = 1, 2, \ldots 6,\end{array}$$

woraus auch folgt

$$24)\quad \delta_{h1} c_{k1} + \delta_{h2} c_{k2} + \cdots + \delta_{h6} c_{k6} = \varepsilon_{hk}.$$

Fassen wir dann die Gleichungen (13) mit den Factoren $s_{1h}, s_{2h}, \ldots s_{6h}$ für $h = 1, 2, \ldots 6$ zusammen, so resultirt

$$25)\quad \begin{array}{l} x_x = \xi_x + a_1 \tau + \delta_{11} X + \delta_{21} Y + \delta_{31} Z, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_y = \xi_y + a_6 \tau + \delta_{16} X + \delta_{26} Y + \delta_{36} Z, \end{array}$$

worin

$$26)\quad \begin{array}{l} -\xi_x = \Xi_x s_{11} + H_y s_{12} + \cdots + \Xi_y s_{16}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\xi_y = \Xi_x s_{61} + H_y s_{62} + \cdots + \Xi_y s_{66} \end{array}$$

die Deformationsgrößen bezeichnen, welche die Gesammtdrucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ bei constanter Influenz und Temperatur bewirken würden.

Setzen wir weiter

$$27)\quad \begin{array}{l} r_h + a_1 \varepsilon_{h1} + a_2 \varepsilon_{h2} + \cdots + a_6 \varepsilon_{h6} = p_h \text{ für } h = 1, 2, 3, \\ \beta_{hi} + \delta_{h1} \varepsilon_{i1} + \delta_{h2} \varepsilon_{i2} + \cdots + \delta_{h6} \varepsilon_{i6} = \gamma_{hi} \text{ für } h \text{ und } i = 1, 2, 3, \end{array}$$

worin wegen (23)

$$\gamma_{hi} = \gamma_{ih}$$

ist, und verstehen unter $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ die Functionen

$$28)\quad \begin{array}{l} \alpha_s = \gamma_{11} X + \gamma_{12} Y + \gamma_{13} Z, \\ \beta_s = \gamma_{21} X + \gamma_{22} Y + \gamma_{23} Z, \\ \gamma_s = \gamma_{31} X + \gamma_{32} Y + \gamma_{33} Z, \end{array}$$

so ergeben die Formeln (14)

$$29)\quad \begin{array}{l} \alpha = \alpha_s - (\delta_{11} \Xi_x + \delta_{12} H_y + \cdots + \delta_{16} \Xi_y) + p_1 \tau, \\ \beta = \beta_s - (\delta_{21} \Xi_x + \delta_{22} H_y + \cdots + \delta_{26} \Xi_y) + p_2 \tau, \\ \gamma = \gamma_s - (\delta_{31} \Xi_x + \delta_{32} H_y + \cdots + \delta_{36} \Xi_y) + p_3 \tau. \end{array}$$

Hierin haben die $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ die Bedeutung der bei constanter Spannung und Temperatur influenzirten Momente und lassen sich auch schreiben

$$30)\qquad \alpha_s = -\frac{\partial f_s}{\partial X}, \quad \beta_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Y}, \quad \gamma_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Z},$$

worin

$$31)\quad -2f_s = \gamma_{11} X^2 + \gamma_{22} Y^2 + \gamma_{33} Z^2 + 2\gamma_{23} YZ + 2\gamma_{31} ZX + 2\gamma_{12} XY$$

ist, und f_s als das diëlectrische Potential bei constanter Spannung und Temperatur bezeichnet werden kann.

Benutzt man schließlich, daß nach (21) und (23)

$$32)\qquad r_h + q_1 \delta_{h1} + q_2 \delta_{h2} + \cdots q_6 \delta_{h6} = p_h \text{ für } h = 1, 2, 3$$

ist, und setzt

$$33)\qquad r + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots a_6 q_6 = p,$$

so wird aus der Gleichung (15)

$$34)\qquad \eta = -(a_1 \Xi_x + \cdots + a_6 \Xi_y) + p\tau + p_3 X + p_2 Y + p_3 Z.$$

Die Constanten a_h heißen wegen der Art ihres Auftretens in (25) die thermischen Deformationscoëfficienten, die δ_{hk} wegen der Verbindungen die sie in (29) zwischen Drucken und Momenten herstellen, die piëzoelectrischen Moduln der Substanz. Die p_h werden als pyroelectrische Constanten bei constanter Spannung und Influenz zu bezeichnen sein; sie verschwinden nicht mit den r_h, was damit zusammenhängt, daß sie neben den directen Wirkungen der Temperatur auch die indirecten, durch die Deformationen vermittelten, mit umfassen.

Für p kann man gemäß (19) bilden

$$35)\qquad p = \frac{\varrho_0 \Gamma_s}{T_0},$$

worin Γ_s die mechanisch gemessene specifische Wärme bei constanter Spannung und Influenz bezeichnet und innerhalb der eingeführten Annäherung wie Γ_a constant ist. —

4) Der gewöhnlichen Theorie der diëlectrischen Influenz werden die Beziehungen zu Grunde gelegt

$$36)\qquad \begin{aligned} 4\pi\alpha &= (D_{11} - 1) X + D_{12} Y + D_{13} Z, \\ 4\pi\beta &= D_{21} X + (D_{22} - 1) Y + D_{23} Z, \\ 4\pi\gamma &= D_{31} X + D_{32} Y + (D_{33} - 1) Z, \end{aligned}$$

worin die D_{hk} als die allgemeinen Diëlectricitätsconstanten der Substanz bezeichnet werden können und die Beziehung $D_{hk} = D_{kh}$ erfüllen. Bei diesem Ansatz wird stillschweigend vorausgesetzt, daß

neben der influenzirenden Kraft keine mechanische Einwirkung auf den Körper stattfindet. Damit ist indessen, genau genommen, keineswegs gesagt, daß von Deformationen oder Spannungen überhaupt abgesehen werden kann, denn außer den oben ausdrücklich vernachlässigten Maxwell-Kirchhoff'schen Spannungen entstehen nach (13) resp. (25) secundär Drucke und Deformationen in Folge der Influenz von selbst. Die Coefficienten des obigen Ansatzes (36) sind daher zunächst weder mit denjenigen des Systemes (12), noch mit denen des Systemes (28) identisch; sie berechnen sich aus jenen mit Hülfe der allgemeinen elastischen und electrischen Bedingungsgleichungen, auf die wir weiter unten eingehen, für jeden einzelnen Fall dessen speciellen Umständen gemäß, sind also überhaupt, streng genommen, keine Constanten. Doch giebt es Fälle, wo mit fehlender äußerer mechanischer Einwirkung trotz der electrischen Erregung die Druckcomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ im ganzen Innern verschwinden, während die Deformationsgrößen endlich sind; hier ist dann ersichtlich der Ansatz (36) mit (28) vollkommen aequivalent, und man kann deshalb die Formeln (36) als eine erste Annäherung betrachten, die bei acentrischen Krystallen einer Ergänzung bedarf, was darauf hinauskommt, daß man γ_{hh} mit $(D_{hh}-1)/4\pi$ und γ_{hk} mit $D_{hk}/4\pi$ wesentlich aequivalent ansieht. —

Auch der von mir in der oben citirten Arbeit gemachte Ansatz für die piëzoelectrische Erregung

37) $$\alpha = \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \cdots + \varepsilon_{16} x_y \text{ u. s. f.},$$

der bei isothermen Deformationen mit

38) $$-\alpha = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \cdots + \delta_{16} X_y \text{ u. s. f.}$$

aequivalent gesetzt ist, stellt, wie ich seinerzeit und jetzt wieder hervorgehoben habe, nur denjenigen Theil des stattfindenden Vorganges dar, den ich den primären nannte, und ignorirt die secundären Wirkungen.

Indessen kann man hier das Experiment leicht so einrichten, daß dieser Ansatz mit Strenge gilt. Wenn nämlich die Deformation isotherm und homogen ist, sind auch die Momente α, β, γ constant; in diesem Falle ist aber die ganze electrische Vertheilung mit einer Oberflächenbelegung des Krystalles aequivalent, und deren Wirkung auf innere Punkte kann man leicht beliebig verkleinern, ja unter Umständen ganz aufheben.

Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns, wie dies bei den meisten messenden Beobachtungen geschehen ist, aus dem Kry-

stall ein Parallelepipedon geschnitten, und dieses durch normale Drucke gegen ein Flächenpaar längs einer Kante comprimirt.

Sei demgemäß zur Erfüllung der elastischen Gleichungen gesetzt

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = \Xi_z = 0,\ Z_z = \Pi,$$

so wird für $\tau = 0$ nach (28) und (29)

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma_{11} X + \gamma_{12} Y + \gamma_{13} Z - \delta_{13} \Pi, \\ \beta &= \gamma_{21} X + \gamma_{22} Y + \gamma_{23} Z - \delta_{23} \Pi, \\ \gamma &= \gamma_{31} X + \gamma_{32} Y + \gamma_{33} Z - \delta_{33} \Pi. \end{aligned}$$

Denken wir uns nun jede Fläche mit einem Leiter (Stanniolblatt) belegt und die Belege gegenüberliegender Flächen leitend verbunden, die benachbarter gegen einander isolirt, so wird in den Belegungen je eine der Oberflächenladung der betreffenden Prismenfläche entgegengesetzte Ladung gebunden, während die frei werdenden gleichartigen Ladungen in der Schließung einen kurzen Strom erzeugen. Die gebundenen Ladungen in den Belegungen compensiren die scheinbaren Ladungen des Krystalles, X, Y, Z verschwinden demgemäß, und es wird streng

$$\alpha = -\delta_{13} \Pi,\quad \beta = -\delta_{23} \Pi,\quad \gamma = -\delta_{33} \Pi.$$

Bezeichnet man die Flächen normal zu den Coordinatenaxen durch F_x, F_y, F_z, so sind αF_x, βF_y, γF_z die sich in den Schließungen ausgleichenden Electricitätsmengen, deren Messung die Bestimmung der Moduln δ_{13}, δ_{23}, δ_{33} ermöglichen würde.

Die bisherigen Beobachter, so auch Riecke und ich, haben diesen Weg, welcher die Störung durch secundäre Wirkungen streng eliminirt, aus technischen Gründen nicht eingeschlagen, sondern einen, welcher dies nur angenähert leistet. Sie haben erstens nur ein Flächenpaar, z. B. $F_{\pm z}$, mit einem Leiter belegt, und dann die eine Belegung mit der Erde, die andere mit dem Conductor eines Electrometers verbunden. Von der ersten Belegung wird auf diese Weise die freie Ladung völlig beseitigt, von der letzteren um so näher, je größer die Capacität des Conductors neben derjenigen der Belegung ist.

Auf den belegten Flächen $F_{\pm z}$ kann auf diese Weise die wirksame Ladung zur Unmerklichkeit herabgedrückt werden; auf den unbelegten Flächen, also auf $F_{\pm x}$, $F_{\pm y}$, bleiben dagegen wirksame Ladungen erhalten.

Man kann aber plausibel machen, daß letztere merkliche secundäre Wirkungen auszuüben nicht vermögen. Da nämlich gegen-

überliegende Flächen, z. B. F_{+z} und F_{-z}, entgegengesetzt gleiche Ladungen besitzen, so muß deren influenzirende Wirkung sich jedenfalls dann in aller Strenge aufheben, wenn die Z-Axe eine Hauptaxe des Influenzellipsoides ist, denn unter diesen Umständen haben die Flächen F_{+x} und F_{-x}, wie auch F_{+y} und F_{-y}, vollkommen gleichwerthige Lagen. Solche Orientirungen haben Riecke und ich aber ausschließlich bei unsern Beobachtungen benutzt. Im allgemeinen Falle bleibt allerdings eine influenzirende Wirkung der Seitenflächen übrig; indessen ist dieselbe von der Ordnung des Unterschiedes der verschiedenen Diëlectricitätsconstanten, wird also jederzeit sehr klein sein, wenn anders man aus den Unterschieden der optischen Constanten der Krystalle auf die der Diëlectricitätsconstanten schließen darf, und dürfte sich deshalb im Allgemeinen der Wahrnehmung entziehen.

Uebrigens sind Mittel vorhanden, um durch die Beobachtung festzustellen, ob jene secundären Wirkungen merklich sind oder nicht; denn da die influenzirende Wirkung der Seitenflächen von deren Größe abhängt, so wird sie immer dann zu vernachlässigen sein, wenn die Beobachtungen mit Prismen von verschiedenen Verhältnissen der Kantenlängen die gleichen Resultate ergeben. —

5) Um nun die strengen Formeln für die betreffenden Vorgänge abzuleiten, denken wir uns den zu erregenden Krystall im unendlichen leeren Raume befindlich, auf seine Oberflächen äußere Drucke mit den Componenten $\overline{\Xi}$, $\overline{H}$, $\overline{Z}$ pro Flächeneinheit, auf sein Inneres räumliche Kräfte mit den Componenten Ξ, H, Z pro Volumeneinheit wirkend. Erstere werden in Wirklichkeit nur durch andere feste Körper, die gegen den Krystall gedrückt werden, hervorgebracht; ein besonders wichtiger Fall ist der, daß diese äußern Körper Leiter sind. Findet eine Influenzirung durch eine äußere electrische Vertheilung statt, so mag letztere sich auf absolut starren Isolatoren befinden.

Unter diesen Umständen gelten folgende Bedingungen.

Die innern Kräfte haben die Hauptgleichungen

39)
$$\Xi = \frac{\partial \Xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Xi_z}{\partial z},$$
$$H = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z},$$
$$Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

und die Oberflächenbedingungen

$$
40)\quad \begin{aligned}
\overline{\Xi} &= \overline{\Xi}_x \cos(n_i, x) + \overline{\Xi}_y \cos(n_i, y) + \overline{\Xi}_z \cos(n_i, z),\\
\overline{H} &= \overline{H}_x \cos(n_i, x) + \overline{H}_y \cos(n_i, y) + \overline{H}_z \cos(n_i, z),\\
\overline{Z} &= \overline{Z}_x \cos(n_i, x) + \overline{Z}_y \cos(n_i, y) + \overline{Z}_z \cos(n_i, z),
\end{aligned}
$$

in denen n_i die innere Normale bezeichnet, zu erfüllen.

Für $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ sind hierin nach dem S. 348 Gesagten die Werthe (13) zu setzen.

Bedingungen, welche die Verrückungen für einzelne Punkte oder Bereiche vorschreiben, kommen nicht in Betracht, wenn es sich nur um die Bestimmung von Deformationsgrößen und Momenten handelt: dagegen müssen erstere noch den sechs Kirchhoff'schen Formeln

$$
41)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 y_z}{\partial y \partial z}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&2\frac{\partial^2 x_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y \partial x}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}
$$

genügen, welche die Bedingungen dafür sind, daß $x_x, \ldots x_y$ durch dasselbe System von Verrückungen ausdrückbar sind. Diese Formeln sind identisch erfüllt, wenn die Deformationsgrößen constant oder lineäre Functionen der Coordinaten sind. —

Die Potentialfunction der ganzen freien Ladungen hat im Krystall die Hauptgleichung

$$
42)\quad \Delta V_i = +4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right),
$$

im äußern Raum die andere

$$
43)\quad \Delta V_a = -4\pi \varrho_a
$$

zu erfüllen; für α, β, γ sind dabei die Werthe (14) oder (29) zu setzen, ϱ_a ist die vorgeschriebene influenzirende Dichte.

Ist ϱ_a nur im Endlichen von Null verschieden, ist $\int \varrho_a dk$ über das gesammte influenzirende System endlich, und hat auch der Krystall endliche Dimensionen, so verhält sich V_a im Unendlichen wie die Potentialfunction endlicher Massen.

In der Grenze des Krystalles nach dem leeren Raume hin muß sein

44) $$\overline{V}_i = \overline{V}_a,$$

44′) $$\frac{\partial \overline{V}_a}{\partial n_a} + \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial n_i} = +4\pi(\overline{\alpha}\cos(n_i, x) + \overline{\beta}\cos(n_i, y) + \overline{\gamma}\cos(n_i, z)).$$

Ist der anstoßende (äußere) Raum von einem Conductor erfüllt, so gilt in demselben V_a = Const., also an der betreffenden Grenzfläche $\overline{V}_i$ = Const. Diese Constante wird in Praxi meist als gegeben, resp. durch Messung bestimmbar anzusehen sein. In diesem Falle hat die zweite Gleichung (44′) mitunter nicht den Charakter einer Oberflächenbedingung für V_i und V_a, sondern dient zur Bestimmung der Ladung des Conductors.

Zu den vorstehenden Formeln kommen, wenn kein Temperaturgleichgewicht herrscht, noch die thermischen Bedingungsgleichungen.

Um das Problem nicht zu sehr zu compliciren, wollen wir weiterhin zunächst isothermische Vorgänge voraussetzen, also $\tau = 0$ nehmen.

6) Das einfachste Problem, auf welches die obigen Formeln angewendet werden können, ist das einer gegen ihre Dicke sehr großen, seitlich freien planparallelen Platte unter der Wirkung eines normalen Oberflächendruckes in einem homogenen electrischen Felde, da hier alle Variabeln nur von einer Coordinate abhängen.

Wir wählen die Ebenen $z = 0$ und $z = H$ zur Begrenzung der Platte, bezeichnen den äußern Druck mit Π, die äußern electrischen Kräfte mit X_a, Y_a, Z_a, die innern mit X_i, Y_i, Z_i und nehmen an, daß mit ersteren auch letztere constant werden. Es wird in diesem Falle

45) $$\begin{aligned} -V_a &= X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a \text{ für } z > H \\ -V_i &= X_i x + Y_i y + Z_i z + C_i \\ -V_a &= X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a' \text{ für } z < 0, \end{aligned}$$

worin die C Constanten bezeichnen, und die Hauptgleichung (42) wird zu

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

woraus sich γ als von z unabhängig ergiebt, während die Oberflächenbedingungen (44) und (44′) lauten

46) $$\begin{aligned} X_i &= X_a, \quad Y_i = Y_a \\ Z_a - Z_i &= +4\pi\gamma. \end{aligned}$$

Zur Befriedigung der elastischen Gleichungen setzen wir

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_x = Z_x = 0,\ Z_z = \Pi;$$

es wird hierdurch

$$47)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \gamma_{11} X_i + \gamma_{12} Y_i + \gamma_{13} Z_i - \delta_{13} \Pi, \\ \beta &= \gamma_{21} X_i + \gamma_{22} Y_i + \gamma_{23} Z_i - \delta_{23} \Pi, \\ \gamma &= \gamma_{31} X_i + \gamma_{32} Y_i + \gamma_{33} Z_i - \delta_{33} \Pi. \end{aligned}$$

Die Combination der letzten dieser Gleichungen mit (46) liefert

$$\frac{1}{4\pi}(Z_a - Z_i) = \gamma_{31} X_a + \gamma_{32} Y_a + \gamma_{33} Z_i - \delta_{33} \Pi,$$

also

$$48)\qquad (1 + 4\pi\gamma_{33})\ Z_i = Z_a - 4\pi(\gamma_{31} X_a + \gamma_{32} Y_a - \delta_{33} \Pi),$$

und durch das Einsetzen dieser Werthe erhält man α, β, γ durch X_a, Y_a, Z_a und Π ausgedrückt.

In dem einfachsten Falle, daß nur eine influenzirende Kraft parallel Z wirkt, und auch Π verschwindet, wird

$$Z_i = \frac{Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},$$

also

$$49)\qquad \alpha = \frac{\gamma_{13} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},\ \beta = \frac{\gamma_{23} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},\ \gamma = \frac{\gamma_{33} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}};$$

und nach (25) auch

$$50)\qquad x_x = \frac{\delta_{31} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},\ y_y = \frac{\delta_{32} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},\ \ldots\ x_y = \frac{\delta_{36} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}.$$

Hier üben also auf die influenzirten Momente α, β, γ die secundären mechanischen Wirkungen keinen Einfluß; der Ansatz (36) ist demgemäß in diesem Falle mit (28) aequivalent.

Wirkt hingegen Π allein, so ist

$$Z_i = \frac{4\pi\delta_{33}\Pi}{1 + 4\pi\gamma_{33}},$$

also

$$51)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -\left(\delta_{13} - \frac{4\pi\delta_{33}\gamma_{13}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi,\ \beta = -\left(\delta_{23} - \frac{4\pi\delta_{33}\gamma_{23}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi, \\ \gamma &= -\left(1 - \frac{4\pi\gamma_{33}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\delta_{33}\Pi = -\frac{\delta_{33}\Pi}{1 + 4\pi\gamma_{33}}; \end{aligned}$$

52) $x_z = -\left(s_{13} - \frac{4\pi\delta_{33}\delta_{31}}{1+4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi, \ldots \quad x_y = -\left(s_{63} - \frac{4\pi\delta_{33}\delta_{36}}{1+4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi.$

Die zweiten Glieder in den sämmtlichen Klammern enthalten den Einfluß der secundären Wirkungen.

Ist die Krystallplatte beiderseitig mit Leitern in Berührung, die auf das Potential V_0 resp. V_1 geladen sind und kurz die Belegungen der Platte heißen mögen, so muß im Innern

53) $$V_i = V_0 + (V_1 - V_0)\frac{z}{H}$$

sein, also

53') $$X_i = Y_i = 0, \quad Z_i = \frac{V_0 - V_1}{H};$$

wirkt zudem wieder ein normaler Druck Π, so ist

53") $$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = \Xi_z = 0, \quad Z_z = \Pi.$$

Demnach wird hier

54) $$\alpha = \gamma_{13}\frac{V_0 - V_1}{H} - \delta_{13}\Pi,$$
$$\beta = \gamma_{23}\frac{V_0 - V_1}{H} - \delta_{23}\Pi,$$
$$\gamma = \gamma_{33}\frac{V_0 - V_1}{H} - \delta_{33}\Pi.$$

Die ersten Glieder verschwinden, wenn die beiden Leiter mit einander verbunden sind, also $V_0 = V_1$ ist; daher verschwindet in diesem Falle, wie schon oben S. 352 gesagt, auch die Selbstinfluenz des Dielectricums mit aller Strenge.

Die freien Ladungen der Grenzflächen $z = 0$ und $z = H$ folgen aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_a}{\partial n_a} = -4\pi\sigma',$$

worin σ' die freie Flächendichte bezeichnet; da die außen an das Diëlectricum grenzenden Körper Leiter sind, und V_i den Werth (53) hat, so reducirt sich diese Formel auf

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} = -4\pi\sigma' = \mp\frac{V_1 - V_0}{H},$$

worin das obere Zeichen für die Fläche $z = H$, das untere für die

Fläche $z = 0$ gültig ist. σ' liegt zum Theil im Diëlectricum, zum Theil im Leiter. Den ersteren Antheil σ'' können wir aus der Thatsache folgern, daß bei constanten Momenten α, β, γ das erregte Diëlectricum mit einer Oberflächenbelegung von der Dichte $\sigma'' = -(\bar{\alpha}\cos(n_i, x) + \bar{\beta}\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z))$ aequivalent ist; dies ergiebt in unserem Falle

$$\sigma'' = \pm\gamma.$$

Hiernach erhält man für die innerhalb des Leiters an der Grenzfläche liegende Dichte die Formel

$$\sigma = \sigma' - \sigma'' = \pm\frac{V_1 - V_0}{4\pi H} \mp \gamma,$$

d. h. unter Rücksicht auf die dritte Gleichung (54)

55) $$\sigma = \pm\frac{1 + 4\pi\gamma_{33}}{4\pi H}(V_1 - V_0) \pm \delta_{33}\Pi,$$

wobei das obere Vorzeichen die Dichte σ_1 der Fläche $z = H$, das untere die Dichte σ_0 der Fläche $z = 0$ bestimmt.

Diese Resultate zeigen, daß die in den Leitern an die Grenzfläche nach dem Diëlectricum gebundenen Dichten denen, welche im Diëlectricum an der gleichen Fläche liegen, keineswegs allgemein entgegen gesetzt gleich sind; dies findet vielmehr nur dann statt, wenn $V_1 = V_0$ ist, die beiden Belegungen also leitend verbunden sind.

Wir wollen die Betrachtung noch in der Richtung erweitern, daß wir an die beiden Belegungen Capacitäten angehängt denken. Dies können wir erreichen, ohne die Potentiale von mehr Coordinaten, als von z allein, abhängig zu machen, indem wir den Belegungen des Krystalls die Form von Platten mit den beiläufigen Dicken d_1 und d_0 geben und ihnen wiederum von außen her parallele und zur Erde abgeleitete plattenförmige Leiter nähern; dadurch entstehen zwei Condensatoren, deren Capacitäten wir C_1 und C_0 nennen.

Ist die Entfernung der beiden Condensator-Platten auf der Seite $+z$ gleich h_1, auf der Seite $-z$ gleich h_0, so wird in den Zwischenräumen die Potentialfunction die Werthe besitzen

$$V_+ = V_1\frac{H + h_1 + d_1 - z}{h_1} \quad \text{und} \quad V_- = V_0\frac{z + h_0 + d_0}{h_0},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial V_+}{\partial z} = -\frac{V_1}{h_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_-}{\partial z} = +\frac{V_0}{h_0}.$$

Hiernach liegen auf den äußern Flächen der beiden Belegungen die Dichten

$$\sigma_+ = \frac{V_1}{4\pi h_1}, \quad \sigma_- = \frac{V_0}{4\pi h_0},$$

die sich, wenn wir mit der Größe F der Flächen erweitern und die Capacitäten der angehängten Condensatoren

$$\frac{F}{4\pi h_1} = C_1, \quad \frac{F}{4\pi h_0} = C_0$$

einführen, auch schreiben lassen

55′) $$\sigma_+ = \frac{V_1 C_1}{F}, \quad \sigma_- = \frac{V_0 C_0}{F}.$$

Haben die Belegungen ursprünglich keine Ladungen mitgetheilt erhalten, so muß

$$\sigma_+ = -\sigma_1, \quad \sigma_- = -\sigma_0$$

sein, und da $\sigma_1 = -\sigma_0$ ist, erhält man aus (55′)

$$V_1 - V = -F\sigma_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right).$$

Setzt man für σ_1 den aus (55) folgenden Werth ein, so ergiebt dies

56) $$V_1 - V_0 = \frac{-\delta_{33}\Pi F\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}{1 + \frac{1+4\pi\gamma_{33}}{4\pi}\frac{F}{H}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)},$$

was in Verbindung mit (54) auch die entsprechenden Werthe von α, β, γ zu bestimmen gestattet.

Nach dem Seite 351 Gesagten kann man angenähert γ_{33} mit dem Ausdruck $(D_{33}-1)/4\pi$, also $1+4\pi\gamma_{33}$ mit D_{33} identificiren, wobei D_{33} die der Z-Axe entsprechende Diëlectricitätsconstante des Krystalles bezeichnet. Dann ist

56′) $$\frac{1+4\pi\gamma_{33}}{4\pi}\frac{F}{H} = C$$

die Capacität des aus den zwei Belegungen und dem Diëlectricum bestehenden Condensators, und die Formel (56) nimmt die Gestalt an

56″) $$V_1 - V_0 = -\frac{\delta_{33}\Pi F\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}{1 + C\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}.$$

Dies zeigt, daß in allen Fällen, wo die beiden angehängten Capacitäten C_1 und C_0 groß sind gegen die Capacität C des ursprünglichen Systemes, die obige strenge Formel mit der angenäherten

$$V_1 - V_0 = -\delta_{33} \Pi F \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right)$$

vertauscht werden kann; die letztere läßt sich auch direct aus der letzten Gleichung (54) ableiten, wenn man darin das erste Glied, d. h. die secundären Wirkungen vernachlässigt.

Hiermit ist das in 4) allgemein Bemerkte in einem speciellen Falle mit voller Strenge erwiesen.

Es erscheint unbedenklich, die erhaltenen Resultate auf die Fälle zu übertragen, wo die angehängten Capacitäten auf andere Weise erhalten werden, als oben vorausgesetzt worden. Die Formeln liefern dann die strenge Theorie einer Methode zur Bestimmung des piëzoelectrischen Moduls δ_{33} durch die Beobachtung der Potentialdifferenz $V_1 - V_0$, welche bei der Compression einer Krystallplatte auf den Belegungen ihrer Grundflächen entsteht. —

Waren die Belegungen nicht ursprünglich unelectrisch, sondern mit den Ladungen s_0 und s_1 pro Flächeneinheit versehen, so ist

$$\sigma_+ = s_1 - \sigma_1, \qquad \sigma_- = s_0 - \sigma_0,$$

und es folgt aus (55')

$$F\left(\frac{s_1 - \sigma_1}{C_1} - \frac{s_0 - \sigma_0}{C_0} \right) = V_1 - V_0.$$

Bezeichnet man die gesammten Ladungen der Belege $F s_1$ mit E_1, $F s_0$ mit E_0, und setzt für σ_1 und σ_0 die aus (55) folgenden Werthe, indem man Π gleich Null wählt, so erhält man

$$57) \qquad V_1 - V_0 = \frac{\dfrac{E_1}{C_1} - \dfrac{E_0}{C_0}}{1 + \dfrac{1 + 4\pi\gamma_{33}}{4\pi} \dfrac{F}{H} \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_0} \right)},$$

oder bei Benutzung der Abkürzung (56')

$$57') \qquad V_1 - V_0 = \frac{\dfrac{E_1}{C_1} - \dfrac{E_0}{C_0}}{1 + C\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_0} \right)}.$$

Diese Formel giebt das strenge Gesetz für die Potentialdifferenz eines Condensators, der aus einer Krystallplatte mit zwei Belegungen und zwei angehängten Capacitäten besteht.

Ist die Belegung $z = 0$ zur Erde abgeleitet, so kann man sowohl V_0 gleich Null, als C_0 gleich unendlich setzen und erhält dadurch einfacher

$$V_1 = \frac{E_1}{C + C_1},$$

in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Theorie.

Was die Deformationen angeht, so folgt aus (25) und (53′)

58) $$x_x = \delta_{13} \frac{V_0 - V_1}{H} - s_{31} \Pi, \ldots x_y = \delta_{36} \frac{V_0 - V_1}{H} - s_{63} \Pi;$$

wird ein seitlicher Druck nicht ausgeübt, so gilt einfacher

58′) $$x_x = \delta_{31} \frac{V_0 - V_1}{H}, \ldots x_y = \delta_{36} \frac{V_0 - V_1}{H};$$

secundäre Vorgänge sind hier also ohne Einfluß, und man darf die Electrostriction in dem vorausgesetzten Falle in aller Strenge nach den Formeln berechnen, die Herr P. Curie angewandt hat.

Neben dem Problem der Platte ist das einer Kugel im homogenen Felde, die mechanischen Kräften nicht ausgesetzt ist, das denkbar einfachste. Man erkennt nämlich leicht, daß man für V_i und V_a dieselben Ansätze machen kann, wie bei der angenäherten Theorie, welche die secundären Wirkungen ignorirt, nämlich

59) $$V_i = Ax + By + Cz,$$
$$V_a = Lx + My + Nz + l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

und daneben so verfügen, daß

59′) $$\Xi_x = \ldots = \Xi_y = 0$$

wird; denn diese Werthe erfüllen die Gleichungen (39), (40), (42), (43) und, bei geeigneter Verfügung über die Constanten A, B, C, l, m, n, auch die Grenzbedingungen (44); überdies werden die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ nach (25) constant, befriedigen also auch die Bedingungen (41). Somit wird die Aufgabe der Influenzirung einer Kugel im homogenen Felde durch die frühere angenäherte Methode streng gelöst, und der Ansatz (36) ist auch hier

mit (28) aequivalent; die Ergänzung, welche die strenge Theorie liefert, besteht in der Bestimmung der die Influenzirung begleitenden Electrostriction.

Es mag hier nochmals daran erinnert werden, daß die vorstehenden Resultate nur auf Krystalle ohne Symmetriecentrum anwendbar sind, u. zw. bei Beschränkung auf die durch den Ansatz (8) für die freie Energie ξ gegebene Genauigkeit.

Wenn, wie bei diesem und einem der früheren Probleme die sämmtlichen Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ verschwinden, so reducirt sich die Formel (34) auf

$$\eta = p\tau + p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i;$$

aus ihr folgt, daß bei plötzlichem Erregen des electrischen Feldes eine Temperatursteigerung eintritt, gegeben durch

$$-p\tau = p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i.$$

Da in den genannten Fällen X_i, Y_i, Z_i constant sind, so gilt Gleiches von τ. Allgemein findet diese einfache Beziehung aber keineswegs statt, da, wie gezeigt, auch bei verschwindenden mechanischen Einwirkungen innere Spannungen secundär entstehen; diese sind dann nothwendig mit dem Ort variabel, und Gleiches gilt nach den Formeln (29) auch von τ.

7) Ein besonders eigenartiges Interesse bietet, wie ich schon in der ersten Abhandlung[1]) ausgeführt habe, das Problem der gleichförmigen Dehnung, Drillung und Biegung eines gegen seinen Durchmesser langen Kreiscylinders durch Einwirkungen auf seine Endquerschnitte wegen der Beobachtungen, welche über die dabei auftretenden electrischen Verhältnisse vorliegen. Es ist sehr überraschend, daß auch dieser Fall sich mit der größten Leichtigkeit in aller Strenge durchführen läßt.

Wir denken den Cylinder von unendlich großer Länge, legen die Z-Axe in die Cylinderaxe, bezeichnen die auf den positiven Endquerschnitt wirkenden Momente um die X-, Y-, Z-Axe mit Λ, M, N, die resultirende Zugkraft parallel der Z-Axe mit Z, und machen die Annahme, daß, wie elastisch, so auch electrisch alle Querschnitte einander gleichwerthig sein sollen. Dem scheint zunächst zu widersprechen, daß die Endquerschnitte des Cylinders bei der vorausgesetzten Deformation im Allgemeinen entgegengesetzt erregt werden und hierdurch eine influenzirende electrische Kraft parallel der Cylinderaxe entstehen muß. Da wir

1) W. Voigt, l. c. p. 55 u. f.

indessen den Cylinder unendlich lang, aber von endlichem Querschnitt vorausgesetzt haben, so wird, so lange die Ladungen der Endflächen endlich sind, — was wir voraussetzen dürfen, — diese Kraft als unendlich klein zu vernachlässigen, also auch das electrische Potential als Function von x und y allein zu betrachten sein. Das Problem ist daher vollständig durch Betrachtung der XY-Ebene zu erledigen.

Da unter den gemachten Voraussetzungen bei dem rein elastischen Problem alle Druckcomponenten als lineare Functionen von x und y gefunden werden[1]), so machen wir jetzt den analogen Ansatz, der die Gleichungen (39) und (40) identisch befriedigt; speciell setzen wir

60)
$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = 0,$$
$$-Z_z = A_3 x + B_3 y + C_3, \quad -H_z = A_4 x, \quad -\Xi_z = B_5 y,$$

worin dann, falls Q den Querschnitt, $\varkappa$ den Trägheitsradius desselben um einen Durchmesser bezeichnet,

61)
$$QA_3\varkappa^2 = -M, \quad QB_3\varkappa^2 = +\Lambda, \quad QC_3 = Z$$
$$QA_4\varkappa^2 = -QB_5\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}N$$

ist.

Ferner setzen wir, um, wie die Drucke, so auch die electrischen Kräfte lineären Functionen von x und y gleich zu machen,

62) $$V_i = \tfrac{1}{2}A_1 x^2 + Axy + \tfrac{1}{2}A_2 y^2 + B_1 x + B_2 y + C,$$

woraus folgt

62′) $$-X_i = A_1 x + Ay + B_1, \quad -Y_i = Ax + A_2 y + B_2, \quad -Z_i = 0.$$

Da hierdurch alle Deformationsgrößen in x und y lineär werden, so sind auch die Bedingungen (41) identisch erfüllt.

Bei Einführung von Polarcoordinaten r und ϑ nimmt V_i die Gestalt an

63)
$$V_i = \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)r^2 + C + (B_1 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta)r$$
$$+ \tfrac{1}{4}(A_1 - A_2)r^2 \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2} Ar^2 \sin 2\vartheta.$$

Dies giebt die Veranlassung, für V_a die bekannte Reihe für das logarithmische Potential einer Belegung der Randcurve des Cylinderquerschnitts einzuführen, welche die Gleichung $\Delta V_a = 0$ befriedigt, und dieselbe mit dem dritten Glied abzubrechen.

Die Bedingung $\overline{V}_i = \overline{V}_a$ bestimmt ihre Constanten durch diejenigen von V_i und giebt V_a dadurch die Form

1) W. Voigt, Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, Abh. der K. G. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 34, S. 53 u. f., 1887.

$$
64)\quad \begin{aligned} V_a = \left(\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)R^2 + C\right)\frac{l(r)}{l(R)} + \frac{R^2}{r}(B_1\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta) \\ + \frac{R^4}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}(A_1 - A\ )\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}A\sin 2\vartheta\right). \end{aligned}
$$

Zur Bestimmung der Constanten von V_i dient einerseits die Hauptgleichung (42), welche hier lautet

$$
65)\quad A_1 + A_2 = 4\pi[\gamma_{11}A_1 + 2\gamma_{12}A + \gamma_{22}A_2 - \delta_{13}A_3 - \delta_{14}A_4 - \delta_{23}B_3 - \delta_{25}B_5],
$$

außerdem die zweite Grenzbedingung (44′), welche die Gestalt annimmt

$$
66)\quad \begin{aligned} \left(\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)R^2 + C\right)\frac{1}{Rl\,R} - \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2)R - 2(B_1\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta) \\ - R\left((A_1 - A_2)\cos 2\vartheta + 2A\sin 2\vartheta\right) \\ = -4\pi\{(\gamma_{11}A_1 + 2\gamma_{12}A + \gamma_{22}A_2 - \delta_{13}A_3 - \delta_{14}A_4 - \delta_{23}B_3 - \delta_{25}B_5)\tfrac{1}{2}R \\ + (\gamma_{11}B_1 + \gamma_{12}B_2 - \delta_{13}C_3)\cos\vartheta \\ + (\gamma_{21}B_1 + \gamma_{22}B_2 - \delta_{23}C_3)\sin\vartheta \\ + (\gamma_{11}A_1 - \gamma_{22}A_2 - \delta_{13}A_3 - \delta_{14}A_4 + \delta_{23}B_3 + \delta_{25}B_5)\tfrac{1}{2}R\cos 2\vartheta \\ + \left((\gamma_{11}+\gamma_{22})A + \gamma_{12}(A_1 + A_2) - \delta_{13}B_3 - \delta_{15}B_5 - \delta_{23}A_3 - \delta_{24}A_4\right)\tfrac{1}{2}R\sin 2\vartheta\}. \end{aligned}
$$

Setzt man die Coefficienten gleicher trigonometrischer Functionen auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man sechs Gleichungen, welche die Bestimmung der sechs Unbekannten A, A_1, A_2, B_1, B_2, C gestatten.

Der Werth von C hat kein specielles Interesse, dagegen ist es wichtig, daß in V_a der Factor des logarithmischen Gliedes, nämlich

$$
\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)R^2 + C,
$$

sich gleich Null findet.

Die drei Constanten A_h sind nur in den folgenden Formeln enthalten

$$
67)\quad \begin{aligned} A_1(4\pi\gamma_{11} - 1) + A_2(4\pi\gamma_{22} - 1) + A\,8\pi\gamma_{12} &= G_1, \\ A_1(4\pi\gamma_{11} - 2) - A_2(4\pi\gamma_{22} - 2) &= G_2, \\ A_1 4\pi\gamma_{12} + A_2 4\pi\gamma_{12} + A\left(4\pi(\gamma_{11} + \gamma_{22}) - 4\right) &= G_3; \end{aligned}
$$

in denen mit den G_h folgende nach (61) gegebene Größen bezeichnet sind

$$67') \qquad \begin{aligned} G_1 &= 4\pi(\delta_{13}A_3 + \delta_{14}A_4 + \delta_{23}B_3 + \delta_{25}B_5), \\ G_2 &= 4\pi(\delta_{13}A_3 + \delta_{14}A_4 - \delta_{23}B_3 - \delta_{25}B_5), \\ G_3 &= 4\pi(\delta_{13}B_3 + \delta_{15}B_5 + \delta_{23}A_3 + \delta_{24}A_4). \end{aligned}$$

Die Constanten B_1 und B_2 folgen aus

$$68) \qquad \begin{aligned} B_1(4\pi\gamma_{11} - 2) + B_2 4\pi\gamma_{12} &= 4\pi\delta_{13}C_3, \\ B_1 4\pi\gamma_{21} + B_2(4\pi\gamma_{22} - 2) &= 4\pi\delta_{23}C_3. \end{aligned}$$

Nach (61) bestimmt sich C_3 allein durch die Zugkraft Z, dagegen A_3, B_3, A_4, B_5 nur durch die ausgeübten Momente $\varDelta$, M, N.

Das für V_a erhaltene Resultat zerfällt hiernach in zwei Theile verschiedener Natur V'_a und V''_a, die sich in Praxi sondern lassen; denn nach (67) und (68) hängt B_1 und B_2 nur von Z, dagegen A, A_1, A_2, C nur von den $\varDelta$, M, N ab.

Wirkt also nur eine Zugkraft Z, so gilt

$$69) \qquad V'_a = \frac{R^2}{r}(B_1 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta),$$

oder unter Einführung eines Hülfswinkels ϑ_0 und einer neuen Constante B

$$69') \qquad V'_a = \frac{B}{r}\sin(\vartheta - \vartheta_0).$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß der äußere Raum durch die Ebene $\vartheta = \vartheta_0$ in zwei Hälften getheilt wird, in deren einander spiegelbildlich entsprechenden Punkten die Potentialwerthe einander entgegengesetzt gleich sind. Daraus folgt, daß in entsprechenden Punkten des Raumes auch die wirkenden Kräfte einander spiegelbildlich entsprechen und daß an entsprechenden Punkten der Oberfläche die Dichten entgegengesetzt gleich werden.

Es gilt also der Satz, daß *ein unendlich langer Kreiscylinder, aus einem acentrischen Krystall in beliebiger Orientirung hergestellt, durch longitudinalen Zug oder Druck, wenn überhaupt, jederzeit derartig erregt wird, daß er sich in zwei Hälften von entgegengesetzt gleichem electrischen Verhalten theilt.*

Wirkt auf die Endquerschnitte keine Zugkraft, sondern wirken nur die Momente $\varDelta$, M, N, so nimmt V_a die Form an

$$70) \qquad V''_a = \frac{R^4}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}(A_1 - A_2)\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}A\sin 2\vartheta\right),$$

die aequivalent ist mit

70′) $$V''_a = \frac{B_0}{r^2} \cos 2(\vartheta - \Theta),$$

worin B_0 und Θ Constanten bezeichnen.

Dieser Ausdruck zeigt, daß der äußere Raum durch die Ebenen

$$\vartheta = \Theta \text{ und } \vartheta = \Theta + \frac{\pi}{2}$$

in vier Quadranten zerlegt wird, in deren spiegelbildlich einander entsprechenden Punkten das Potential V_a entgegengesetzt gleiche Werthe besitzt.

Es gilt demnach der weitere Satz, daß ein unendlich langer Kreiscylinder, aus einem acentrischen Krystall in beliebiger Orientirung hergestellt, durch gleichförmige Biegung und Drillung, wenn überhaupt, stets derartig electrisch erregt wird, daß er sich in vier gleiche Theile von entgegengesetzt gleichem electrischen Verhalten theilt.

Das ist derselbe merkwürdige Satz, den ich bereits in meiner ersten Arbeit mitgetheilt habe; er gilt nach dem Vorstehenden also auch bei Berücksichtigung der secundären Vorgänge.

Beide Sätze gelten angenähert, auch wenn der Cylinder eine endliche Länge besitzt, so lange nur sein Durchmesser klein gegen seine Länge ist, und sein Verhalten blos in der Nähe seiner Mitte untersucht wird.

Welche Bedeutung die Function V_a für die Theorie gewisser bequemer Beobachtungsmethoden besitzt, habe ich in meiner ersten Abhandlung auseinandergesetzt.

Die Combination der erhaltenen Resultate für $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, X_i, Y_i, Z_i mit den allgemeinen Formeln (25) und (29) gestattet nun auch die Berechnung der Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ und der Momente α, β, γ; doch bieten die hierfür sich ergebenden Resultate minderes Interesse, als der gefundene Werth von V_a.

8) Von den Problemen der pyroelectrischen Erregung acentrischer Krystalle erledigt sich überaus einfach dasjenige einer Kugel vom Radius R bei constanter Temperatur.

Hier kann man alle Drucke

71) $$\Xi_x = \ldots . = \Xi_y = 0$$

und

$$V_i = Ax + By + Cz,$$

71′) $$V_a = L \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

setzen. Die erste Grenzbedingung (44) ergiebt dann

72) $$L = -AR^3, \quad M = -BR^3, \quad N = -CR^3,$$

und da

72′) $$\begin{aligned} -\alpha &= \gamma_{11} A + \gamma_{12} B + \gamma_{13} C - p_1 \tau, \\ -\beta &= \gamma_{21} A + \gamma_{22} B + \gamma_{23} C - p_2 \tau, \\ -\gamma &= \gamma_{31} A + \gamma_{32} B + \gamma_{33} C - p_3 \tau \end{aligned}$$

wird, so nimmt die zweite Grenzbedingung (44′) die Form an

73) $$\begin{aligned} A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} = -\frac{4\pi}{3} [&(\gamma_{11} A + \gamma_{12} B + \gamma_{13} C - p_1 \tau)\bar{x} \\ &+ (\gamma_{21} A + \gamma_{22} B + \gamma_{23} C - p_2 \tau)\bar{y} \\ &+ (\gamma_{31} A + \gamma_{32} B + \gamma_{33} C - p_3 \tau)\bar{z}]. \end{aligned}$$

Aus ihr folgen die Werthe von $A = -X_i$, $B = -Y_i$, $C = -Z_i$ und durch deren Einführung in (25) schließlich auch die Deformationsgrößen.

Ist die Z-Axe eine ausgezeichnete polare Symmetrieaxe, so ist $\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0$, $\gamma_{11} = \gamma_{22}$, $p_1 = p_2 = 0$; hier wird also

74) $$A = B = 0, \quad C = \frac{\frac{4}{3}\pi p_3 \tau}{1 + \frac{4}{3}\pi\gamma_{33}}, \quad \gamma = \frac{p_0 \tau}{1 + \frac{4}{3}\pi\gamma_{33}}.$$

wo das zweite Glied des Nenners die Wirkung der secundären Vorgänge darstellt.

In diesem Falle nehmen die Deformationsgrößen die einfache Gestalt an

74′) $$x_x = a_1 \tau - \delta_{31} C = y_y, \quad z_z = a_3 \tau - \delta_{33} C,$$
$$y_z = z_x = x_y = 0;$$

hierin geben die in δ_{31} und δ_{33} multiplicirten Glieder den Effect der secundären Electrostriction. —

Diesem Problem ist sehr nahe verwandt dasjenige der Deformation einer Kugel durch einen allseitig gleichen Druck Π.

Hier genügt man den mechanischen Bedingungen, indem man

$$\Xi_x = H_y = Z_z = \Pi, \; H_z = Z_x = \Xi_y = 0$$

setzt; die Ansätze (71′) für V_i und V_a kann man beibehalten und die Rechnung leiten, wie oben; nur tritt in den Formeln (72′) resp.

$(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13})\,\Pi$, $(\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23})\,\Pi$, $(\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33})\,\Pi$ an die Stelle von $-p_1\tau$, $-p_2\tau$, $-p_3\tau$. —

Neben dem Falle constanter Temperatur erregt besonderes Interesse derjenige der nur oberflächlichen Erwärmung. Mit diesem Namen habe ich in meiner ersten Abhandlung eine Temperaturvertheilung bezeichnet, die sich nur in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht von der normalen ($\tau = 0$) unterscheidet. Sie gestattet deshalb eine besonders einfache Behandlung, weil die Deformation durch den großen Kern von constanter Temperatur, dem die Spannungen innerhalb der unendlich dünnen Oberflächenschicht nichts anhaben können, in ganz bestimmter Weise behindert wird.

Wir gehen aus von dem Falle des Halbraumes $z < 0$, der für kleine Werthe z ein endliches, von x und y unabhängiges τ besitzt, während im Uebrigen $\tau = 0$ ist. Es wird dann der ganze Zustand von x und y unabhängig werden.

Die Hauptgleichungen (39) liefern hier

$$\frac{\partial \Xi_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

die Oberflächenbedingungen (40)

$$\overline{\Xi}_z = 0, \quad \overline{H}_z = 0, \quad \overline{Z}_z = 0;$$

es muß also überall Ξ_z, H_z, Z_z gleich Null sein.

Von den Deformationsgrößen müssen x_x, y_y, x_y verschwinden, z_z, y_z, x_z sind nur Functionen von z und genügen dadurch den Bedingungen (41); von den electrischen Componenten sind X und Y gleich Null, deshalb nehmen die Gleichungen $\Xi_z = H_z = Z_z = 0$ die Form an

$$\text{75)} \qquad \begin{aligned} q_3\tau &= c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x - \varepsilon_{33}Z_i, \\ q_4\tau &= c_{43}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x - \varepsilon_{34}Z_i, \\ q_5\tau &= c_{53}z_z + c_{54}y_z + c_{55}z_x - \varepsilon_{35}Z_i. \end{aligned}$$

Die Hauptgleichung (42) lautet hier

$$\frac{dZ}{dz} = -4\pi\frac{d\gamma}{dz},$$

woraus folgt

$$\text{76)} \qquad Z_i = C - 4\pi\gamma, \quad Z_a = C',$$

unter C und C' Constanten verstanden. C' muß verschwinden, da eine unendliche ebene Schicht, die ebensoviel positive, als negative

Electricität in parallelen Ebenen mit constanter Dichte enthält, auf äußere Punkte eine Wirkung nicht üben kann. Die Grenzbedingung (44) bestimmt nur die Integrationsconstante in V_i, die Grenzbedingung (44') liefert

76') $$C = 0, \text{ also } Z_i = -4\pi\gamma.$$

Aus dieser Beziehung, den drei Formeln (75) und der dritten Gleichung (14), welche lautet

77) $$-r_3\tau = \varepsilon_{33}z_z + \varepsilon_{34}y_z + \varepsilon_{35}z_x + \beta_{33}Z_i - \gamma,$$

erhält man dann leicht z_z, y_z, z_x, Z_i, γ durch τ ausgedrückt, und mit Hülfe der erhaltenen Werthe gemäß (14) auch α und β.

Die somit für den Halbraum erhaltene Lösung gestattet nun die Anwendung auf beliebig gestaltete Körper, wenn nur deren Oberfläche stetig gekrümmt ist, und die Temperatur τ blos in einer unendlich dünnen Schicht einen von Null verschiedenen Werth besitzt, der entweder längs der ganzen Oberfläche in derselben Tiefe constant ist oder wenigstens sehr allmählig variirt. Man hat dann die Richtung der äußern Normalen an jeder Stelle für z einzuführen und die obigen Lösungen für α, β, γ auf sie zu transformiren, sodann nach der Grundformel

$$V_a = \int\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) dk_1$$

die Potentialfunction für äußere Punkte zu berechnen. Die Resultate werden ziemlich complicirt, doch bietet die Ableitung, wie ich seiner Zeit gezeigt habe, keine principielle Schwierigkeit.

9) Die Bedingungen für das Problem der diëlectrischen Influenzirung werden gewöhnlich in der Form aufgestellt, daß man von den Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ nach den Richtungen von x, y, z, n ausgeht und die räumlichen und flächenhaften wahren Dichten ϱ und σ durch diese Größen ausdrückt.

Es ist nämlich nach Hertz[1])

78) $$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= D_{11}X + D_{12}Y + D_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} &= D_{21}X + D_{22}Y + D_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} &= D_{31}X + D_{32}Y + D_{33}Z, \\ \mathfrak{N} &= \mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z) \end{aligned}$$

1) H. Hertz, Nachr. v. d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen 1890 No. 4, S. 120; statt der Hertz'schen ε_{hk} sind oben die D_{hk} gesetzt.

und

79) $$4\pi\varrho = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

79′) $$4\pi\sigma_{hk} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_k,$$

wobei durch (h) und (k) zwei in einer Fläche o_{hk} an einander grenzende Diëlectrica bezeichnet sind.

Dieser Weg ist in dem hier gestellten allgemeinen Problem nicht anwendbar und daher von mir in 5) durch einen anderen ersetzt, welcher an die freien Dichten ϱ' und σ' und die Kraftcomponenten X, Y, Z, resp. die Potentialfunction V anknüpft. Ein Grund für diese Abweichung ist sofort ersichtlich: er liegt in der Thatsache, daß bei Berücksichtigung der mechanisch-electrischen Umsetzungen die D_{hk} überhaupt ihren Sinn als der Substanz individuelle Constanten verlieren.

Daneben kommt aber noch ein Umstand in Betracht, der zwar schon in 6) gestreift wurde, aber so wichtig ist, daß er hier am Schluß dieser Mittheilung ausführlich dargelegt zu werden verdient.

Man wird vielleicht zunächst geneigt sein, nach Analogie mit dem Verhalten eines ursprünglich unelectrischen, durch bloße Influenz erregten Diëlectricums, auch einem piëzo- oder pyroelectrisch erregten Krystall nur freie oder scheinbare, aber keine wahren Dichten ϱ und σ beizulegen. Indessen ist leicht nachzuweisen, daß ein piëzo- oder pyroelectrisch erregter Körper eine wahre Ladung besitzen muß.

In der That ist nach Hertz[1]) das innere Potential eines electrisirten Systemes

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int de_w \int \frac{de_f}{r},$$

wobei das eine Integral über alle wahren Ladungen e_w, das andere über alle freien e_f zu erstrecken ist. Aus den Entwickelungen Kirchhoff's[2]) geht hervor, daß, obwohl scheinbar in dem obigen Ausdruck Wechselwirkungen zwischen zwei nur durch Influenz erregten, also wahrer Ladung baaren Körpern nicht enthalten sind, doch die zwischen solchen wirkenden Kräfte durch eine Variation von Φ, welche der Dislocation jener Körper entspricht, d. h. durch die Bestimmung der betreffenden virtuellen

1) Hertz, l. c. p. 133.
2) Kirchhoff, Ges. Abh. Nachtrag. S. 99 u. f.

Arbeit, richtig erhalten werden. Es liegt dies daran, daß bei diesen Dislocationen auch das Potential der Wechselwirkung zwischen dem influenzirenden System und den influenzirten Körpern sich verändert.

Aber in unserem Falle kann ein solches influenzirendes System ganz fehlen, und wenn man die Ladungen der piëzo- und pyroelectrischen Körper als nur scheinbar annimmt, so erhält man dann weder eine Wechselwirkung zwischen ihnen, noch eine Selbstinfluenz in einem einzelnen von ihnen.

Also müssen diese Körper in jedem Falle einen Antheil wahrer Ladung mitgetheilt erhalten.

Dieser Antheil läßt sich bestimmen, wenn man, worüber S. 351 gesprochen ist, den Ansatz (28) mit (36) identificirt, also

$$D_{hh} - 1 = 4\pi\gamma_{hh}, \quad D_{hk} = 4\pi\gamma_{hk}$$

setzt.

Denn aus (79) und (42) folgt durch Subtraction

$$4\pi\left(\varrho + \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\mathfrak{X} - X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{Y} - Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{Z} - Z)}{\partial z};$$

hier ist aber die rechte Seite nach (28)

$$= 4\pi\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial x} + \frac{\partial\beta_s}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_s}{\partial z}\right)$$

und somit

80) $$-\varrho = \frac{\partial(\alpha - \alpha_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta - \beta_s)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma - \gamma_s)}{\partial z},$$

worin $(\alpha - \alpha_s)$, $(\beta - \beta_s)$, $(\gamma - \gamma_s)$ die Differenzen der gesammten und der bei constanter Spannung und Temperatur allein durch Influenz erregten Momente sind. Diese bestimmen sich aus (29), sodaß man schließlich für die wahre räumliche Dichte ϱ erhält:

80′) $$\varrho = \frac{\partial}{\partial x}(\delta_{11}\Xi_x + \cdots \delta_{16}\Xi_y - p_1\tau) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta_{21}\Xi_x + \cdots \delta_{26}\Xi_y - p_2\tau) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta_{31}\Xi_x + \cdots \delta_{36}\Xi_y - p_3\tau).$$

Ganz ebenso liefert die Differenz der Formeln (79′) und (44′), da $\mathfrak{N}_a = N_a$ ist,

$$4\pi\left(\sigma + \bar{\alpha}\cos(n_i, x) + \bar{\alpha}\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right)$$
$$= \mathfrak{N}_i - N_i.$$

Hierin wird die rechte Seite nach (28)

$$= 4\pi\left(\bar{\alpha}_s\cos(n_i, x) + \bar{\beta}_s\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right),$$

woraus folgt

81) $$-\sigma = (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_s)\cos(n_i, x) + (\bar{\beta} - \bar{\beta}_s)\cos(n_i, y) + (\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_s)\cos(n_i, z).$$

Setzt man hier endlich die Werthe (29) ein, so erhält man die Größe der wahren Oberflächendichte

81′) $$\sigma = (\delta_{11}\bar{\Xi}_x + \cdots \delta_{16}\bar{\Xi}_y - p_1\bar{\tau})\cos(n_i, x) + (\delta_{21}\bar{\Xi}_x + \cdots \delta_{26}\bar{\Xi}_y)\cos(n_i, y)$$
$$+ (\delta_{31}\bar{\Xi}_x + \cdots \delta_{36}\bar{\Xi}_y - p_3\tau)\cos(n_i, z).$$

Hieraus ergiebt sich, daß die bei constanter Influenz durch bloße mechanische und thermische Einwirkungen erregten Momente **wahre** Ladungen repräsentiren.

Diese frappirenden Resultate haben ein naheliegendes Analogon in der Theorie des Magnetismus. Wie schon Hertz[1]) ausgesprochen hat, repräsentirt influenzirter vergänglicher Magnetismus scheinbare oder freie Ladungen, permanenter aber wahre, — ein Resultat, welches zwar neuerdings angefochten ist, aber meines Erachtens nicht umgestoßen werden kann, solange man mit diesen Namen dieselben Bedeutungen verbindet, wie Hertz.

Daß man auf derartige Schwierigkeiten gerathen kann, ist im Grunde nicht zu verwundern; denn die Definitionen und Bezeichnungen der „wahren“ und der „freien“ Ladungen knüpfen an specielle Vorgänge an, die vielleicht weder mit der permanenten Magnetisirung, noch mit der piëzo- und pyroelectrischen Erregung innerliche Verwandschaft besitzen; demgemäß ist es nur natürlich, daß die speciellen Vorstellungen, die in jenen Fällen für die Wahl der Bezeichnungen maßgebend gewesen sind, in den letzteren ihre Anwendbarkeit verlieren.

Göttingen, November 1894.

---

1) H. Hertz, l. c. p. 134.

Culturversuche mit „ruhenden Samen“, II. Mittheilung.

Von

A. Peter.

Vorgelegt am 29. December 1894.

II. Fortsetzung der Versuche I—XV.

In diesen „Nachrichten“ machte ich 1893 [1]) Mittheilungen über einige Culturversuche, welche mit solchen Bodenproben angestellt worden waren, die aus gepflanzten Wäldern über ehemaligem Ackerlande entnommen wurden. Da in zahlreichen Culturkästen eine Anzahl Sämlinge sich befand, deren Bestimmung noch nicht mit Sicherheit angegeben werden konnte, und da auch nach Fertigstellung des Berichtes immer noch einzelne neue Sämlinge erschienen, so wurden sämmtliche Culturen den Winter 1893/94 über sowie den folgenden Sommer hindurch unter aller thunlichen Vorsicht gegen das Einschleppen fremder Sämereien weiter beobachtet. Dergleichen Fremdlinge sind denn auch thatsächlich nicht vorgekommen, dagegen traten mehrere früher noch nicht constatirte Arten von Wald-, Acker- und Weidepflanzen auf, und manche der bisher unbestimmt gebliebenen Arten konnten nunmehr sicher erkannt werden, da sie sich inzwischen weiter entwickelt haben und fast alle, z. Th. in mehrfachen Exemplaren, auch zur Blüthe gelangt sind.

Das Ergebniss dieser fortgesetzten Beobachtungen ist nun durchweg, sowohl im ganzen wie betreffs jedes einzelnen Versuches, eine Bestätigung der früher mitgetheilten Resultate, so dass die letzteren dadurch an Zuverlässigkeit noch gewinnen.

1) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Jahrgang 1893, Seite 673—691.

In der auf Seite 688 und 689 der I. Mittheilung gegebenen Uebersicht aller in den Versuchsreihen 1—15 aufgetretenen Arten finden sich 14 Waldpflanzen, 30 Ackerunkräuter und 29 Weidepflanzen verzeichnet, von Arten der Culturländereien demnach 59 Arten[1]). Zu diesen traten 1894 noch hinzu:

A. Waldpflanzen:

Campanula Trachelium	Carex muricata
Stachys silvatica	Poa nemoralis
Carex pallescens	

B. Ackerunkräuter:

Raphanus Raphanistrum	Veronica arvensis
Viola tricolor	Linaria Elatine
Hypericum humifusum	Centunculus minimus
Atriplex patulum	Juncus filiformis
Euphorbia exigua	Poa annua
— Peplus	

C. Weidepflanzen:

Medicago lupulina	Agrostis vulgaris
Trifolium procumbens	Anthoxanthum odoratum
Erythraea Centaurium	Poa compressa.

Die Zahl der Ackerunkräuter, welche aus den beschriebenen 15 Waldboden-Culturen hervorgegangen sind, beläuft sich also jetzt auf 41, diejenige der Weidepflanzen auf 35, so dass dadurch nunmehr 76 Pflanzenarten des Culturlandes constatirt sind, deren Samen noch einige Jahrzehnte hindurch im Erdboden ihre Keimfähigkeit behalten, nachdem die betr. Culturländereien aufgeforstet wurden. Von den aus den vegetationslosen Waldböden aufgegangenen Waldpflanzensamen könnte ähnliches vermuthet werden, doch ist der Beweis dafür auf dem eingeschlagenen Wege nicht zu führen.

Unter den Ackerpflanzen erregen 2 ein besonderes Interesse dadurch, dass sie jetzt bei Göttingen nur sehr selten und nicht in jedem Jahre angetroffen werden, und auch nicht in der unmittelbaren Nähe jener Stellen, von welchen die cultivirten Erdproben stammen, während sie früher, vor der (1882/83 erfolgten) Verkoppelung der Ländereien offenbar in der Gegend häufiger vorgekommen sind. Diese beiden Pflanzen sind Linaria Elatine und Centunculus minimus. Für die erstere werden aus der näheren

---

1) Also nicht c. 70, wie S. 691 angegeben.

Umgebung von Göttingen folgende Fundstellen genannt[1]): Harste, zwischen Lenglern und Bovenden, Knutbühren, Ossenfelde, Settmarshausen, Hetjershausen, am Rossdorfer Holze, Angerstein, Waake, Weenderspring; — und aus dem Universitäts-Herbarium sind noch zu entnehmen: Dransfeld 1816, Elliehausen 1823, Deppoldshausen 1839. Alle diese Beobachtungen rühren aus älterer Zeit her, und nur wenige derselben sind neuerdings wieder bestätigt worden. Nur zwischen dem Leineflusse und den westlich desselben gelegenen Dörfern von Settmarshausen bis Harste wurde Linaria Elatine auch in letzter Zeit noch gesehen, und anderseits theilt mir Herr Professor Boedeker in Göttingen aus seiner Erinnerung mit, dass er vor mehreren Jahren die Pflanze (in wenigen Exemplaren und unbeständig auf sehr beschränkter Localität) östlich von Göttingen am Abhange des Hainberges beobachtet habe. Die erstgenannte Stelle liegt etwa 8 km von der Localität des Versuches No. 8 entfernt, der Fundort Boedekers immerhin noch 1,5 km.

Centunculus minimus ist in den letzten 10 Jahren bei Göttingen nur noch auf den Aeckern zwischen dem Kleinen Hagen und Holtensen (westlich der Leine, durch Herrn Apothekenbesitzer Jahns, nach dessen Aufzeichnungen) gefunden worden, nicht mehr jedoch in den Gegenden östlich des Flusses, wo Kerstlingeröderfeld auf einer Lichtung des Göttinger Waldes gelegen ist. Von anderen Fundstellen werden für Centunculus noch angegeben[2]): Lütjerode, Reiershausen, Seeburg, Mackenrode; — in herb.: mehrfach um Adelebsen, zuletzt 1855, Esebeck 1823. Von diesen Orten liegt Mackenrode der Localität des Culturversuches No. 8 am nächsten, jedoch 4 km weiter östlich unter dem Absturze des Plateaus des Göttinger Waldes.

Das Erscheinen der beiden besprochenen Pflanzen in meinen Culturen gestattet mit grosser Wahrscheinlichkeit die Annahme, dass dieselben vor Zeiten in der Göttinger Gegend nicht so selten waren wie heutzutage, und dass ihre Samen im Erdboden seit jener Zeit die Keimfähigkeit sich bewahrt haben. Hervorzuheben ist noch, dass alle aufgegangenen Exemplare zwar zur Blüthe gelangten, dabei aber ganz auffallend klein und schwächlich geblieben sind. Sie sind auch spät erschienen und haben sich langsam entwickelt, da sie 1893 theils noch nicht aufgegangen waren, theils

---

1) Vergl. Nöldecke, Flora Goettingensis 1886, S. 72; hier ist die einschlägige Litteratur mitberücksichtigt.

2) Nöldecke, a. a. O. S. 82.

erst so wenige Blätter gebildet hatten, dass ich sie damals nicht zu bestimmen vermochte.

Von den (auf S. 690) in meiner ersten Mittheilung genannten, im Saatkamp beobachteten Pflanzenarten sind nun noch 4 weitere in den Culturen erschienen:

Euphorbia exigua	Atriplex patulum
Viola tricolor	Poa compressa,

so dass also von den 38 aus dem Kamp aufgeführten Arten nur 6 in den Culturen nicht vorgekommen sind.

Nachstehend theile ich die Listen derjenigen Arten mit, welche bei fortgesetzter Beobachtung der Culturen I—XV im Jahre 1894 ausser den früher schon genannten noch erkannt wurden und fast ausnahmslos zur Blüthe gelangten.

1. Versuch.

Obere Schicht:	Campanula Trachelium;	
untere Schicht:	Stachys silvatica,	Carex pallescens;

also nur Waldpflanzen.

2. Versuch.

Obere Schicht:	Erythraea Centaurium,	Juncus filiformis,
	Carex muricata,	Agrostis vulgaris;
untere Schicht:	Carex muricata;	

also Wald- und Unlandpflanzen.

3. Versuch.

Obere Schicht:	Anthoxanthum odoratum,	Agrostis vulgaris;
untere Schicht:	Luzula campestris,	Carex muricata,
	Anthoxanthum odoratum,	Agrostis vulgaris;

also überwiegend Weidepflanzen.

5. Versuch.

Obere Schicht:	Euphorbia exigua;	
untere Schicht:	Euphorbia exigua,	Agrostis vulgaris.

6. Versuch.

Obere Schicht:	Medicago lupulina;	
mittlere Schicht:	Atriplex patulum,	Poa annua;
untere Schicht:	Polygonum aviculare;	

also nur Ackerpflanzen.

7. Versuch.

Obere Schicht:	Thlaspi arvense	Valerianella dentata
	Euphorbia exigua	Veronica arvensis;
	Polygonum Convolvulus	

mittlere Schicht:	Thlaspi arvense	Atriplex patulum
	Hypericum humifusum	Veronica arvensis
	Euphorbia exigua	— serpyllifolia;
untere Schicht:	Aethusa agrestis	Atriplex patulum
	Euphorbia exigua	Veronica arvensis
	Polygonum Convolvulus	Poa compressa;

also fast ausschliesslich Ackerunkräuter.

8. Versuch.

Obere Schicht: Aethusa agrestis Linaria Elatine (6 Exemplare)
Poa annua;
mittlere Schicht: Linaria Elatine (2 Exemplare);
also nur Ackerunkräuter.

9. Versuch.

Obere Schicht: Agrostis vulgaris;
mittlere Schicht: Centunculus minimus (3 Exemplare).

10. Versuch.

Obere Schicht: Agrostis vulgaris;
mittlere Schicht: Agrostis vulgaris.

11. Versuch.

Mittlere Schicht: Agrostis vulgaris;
untere Schicht: Trifolium pratense flor. albis.

12. Versuch.

Obere Schicht:	Agrostis vulgaris;	
mittlere Schicht:	Viola tricolor	Trifolium procumbens
	Hypericum humifusum	Poa compressa;

demnach Acker- und Brachlandpflanzen.

13. Versuch.

Obere Schicht:	Trifolium procumbens	Anagallis arvensis;
mittlere Schicht:	Anagallis arvensis;	
untere Schicht:	Linum catharticum;	

also Acker- und Weidepflanzen.

14. Versuch.

Obere Schicht: Euphorbia Peplus;
mittlere Schicht: Agrostis vulgaris.

15. Versuch.

Obere Schicht: Raphanus Raphanistrum Poa nemoralis;
mittlere Schicht: Poa compressa;
Ergebniss also wie früher.

III. Neue Versuche.

Nachdem in den ersten 15 Versuchsreihen mit Waldböden gearbeitet worden war, welche seit weniger als 50 Jahren aus Ackerland aufgeforstet sind, erschien es wünschenswerth auch ältere unter dichtem Waldbestande liegende ehemalige Ackerböden zu cultiviren, namentlich um die Frage zu prüfen, wie lange Zeit die Samen von Ackerunkräutern im Boden liegen können, ohne die Keimfähigkeit einzubüssen.

Unter Beihülfe des Herrn Forstmeister Sames in Alfeld gelang es bald, ein Gebiet ausfindig zu machen, welches stundenweite uralte Ackerflächen enthält, über welchen jetzt 100—150-jähriger Hochwald steht: die Forsten zwischen dem Rhume-Oder-Thal und dem Rodethal nordöstlich von Göttingen. Die Tradition der Gegend, die Namen der Forstorte, das Vorhandensein einzelner Ruinen, besonders aber die ungemein deutlichen sehr breiten Ackerbeete mit tiefen Furchen zwischen denselben weisen darauf hin, dass hier in älteren Zeiten mehrere Dörfer gelegen haben (Leisenberg, Oershausen, Thiershausen), deren ausgedehnte Culturländereien jetzt völlig unter einem prächtigen Buchen- und Eichenwald verschwunden sind, welcher seither dort emporgewachsen ist. Von diesen Ortschaften scheint man keine nähere Kenntniss mehr zu haben, auch ist es mir nicht gelungen sicher festzustellen, zu welcher Zeit die Dörfer aufgegeben wurden. Nach der Beschaffenheit des Forstes zu urtheilen sind dem jetzigen Bestande mindestens eine, vermuthlich aber mehrere Buchen- und Eichen-Generationen von ähnlicher Qualität vorausgegangen, so dass die Verödung der Dorfschaften vielleicht schon eine Folge der verheerenden Krankheiten oder der zerstörenden Kämpfe des 15. und 16. Jahrhunderts gewesen ist, sicher jedoch wenigstens z. Th. bereits vor dem 30jährigen Kriege stattgefunden hat[1]). Derartig uralte Aecker liessen zwar nicht erwarten, dass aus ihnen noch Unkrautsämereien

---

1) Ueber diese verschollenen Ortschaften der Umgebung von Catlenburg und Lindau wird mir noch durch Herrn Oberförster Pelissier folgendes mitgetheilt (vergl. Johann Wolf's „Denkwürdigkeiten des Amtes und Marktfleckens Lindau, 1813“):

Thiershausen, früher Tiedershausen oder Diedershausen, wird als ein grösserer Ort erwähnt, bei welchem Renshausen gelegen hat, aus der Zeit zu Anfang des 16. Jahrhunderts. Renshausen ist 1520 in der Hildesheimer Stiftsfehde zerstört worden und hat bis 1532 wüst gelegen. Thiershausen scheint dabei verschont geblieben zu sein, da es in einem Grenzbegang-Protokoll von 1606 genannt wird („Tiedershausen mit sammt Wiesen, Lande, Teichen . . .“; „zwischen Tiedershausen und Lindau liegt eine Wüstung Walshausen“.). Weiter wird in diesem Grenzbegang noch ein Ort Wenderode erwähnt, welcher damals schon als Wüstung

aufgehen würden, indessen konnten sie immerhin zur Entscheidung der vorliegenden Fragen beitragen, und ich mochte die gebotene Gelegenheit nicht unbenutzt lassen.

Der Waldcomplex, welcher das ehemalige Ackerareal der verschollenen Dörfer jetzt bedeckt, hat eine Ausdehnung von 10—12 km Länge und Breite. Im Westen wird er durch den bis zu 355 m aufsteigenden bewaldeten Höhenzug des Wieter gegen die über das breite cultivirte Leinethal wehenden Westwinde geschützt, und in westöstlicher Richtung von dem fast eben so hohen schmalen Rücken des Langfast durchzogen. Dadurch werden ausgedehnte, relativ tiefliegende und nur schwach geneigte plateauartige Flächen bedingt, welche unter dichtem Walde liegen. Hier wurden die Erdproben für die Culturversuche entnommen.

Mit Rath und That war mir Herr Oberförster Pelissier in Lindau, welchem mein besonderer Dank dafür gebührt, bei meinen wiederholten Besuchen der betr. Forsten behülflich, so dass 7 Versuchsreihen mit Bodenproben aus denselben angestellt werden konnten. Ausserdem habe ich noch 3 weitere Versuchsreihen mit jüngeren Böden durchgeführt, um die in der ersten Mittheilung behandelten Culturen zu ergänzen und zu controliren.

Die Anordnung der Culturen war sehr ähnlich derjenigen bei den ersten 15 Versuchen (resp. 40 Kulturkästen). Wiederum

---

bezeichnet ist und bei Lindau gelegen haben muss; endlich wird berichtet, dass Oedershausen (der jetzige „Oershäuser Erbenforst“) zwischen Bilshausen und Bodensen (jetzt Bodensee) liegt.

Aus diesen Notizen scheint hervorzugehen, dass Thiershausen wie Oershausen erst im 30jährigen Kriege verschwunden sind; ferner ist zu vermuthen, dass noch mehrere kleinere Ansiedelungen in jener Gegend bestanden haben, welche schon im 16. Jahrhundert Wüstungen waren, also entweder im Bauernkriege oder in der Hildesheimer Stiftsfehde oder bei einer der vielen anderen kleinen Fehden zerstört worden sind. Da jedoch Leisenberg, trotz der heute noch erhaltenen Ruine, und trotzdem es eine verhältnissmässig grosse Ausdehnung gehabt zu haben scheint, nicht mehr erwähnt wird, so wird man bei dieser Ortschaft auf ein noch früheres Verschwinden schliessen dürfen, also etwa im 15. Jahrhundert in Folge des „schwarzen Todes“ oder eines der zahlreichen Kämpfe jener Zeit. Die sog. Kirchenruine dürfte das Wohnhaus irgend eines Burgmannes gewesen sein, welcher in Leisenberg sass und entweder den Grafen von Catlenburg oder den Hardenbergern oder den Herren von der Plesse zugehörig gewesen sein mag. Der Erhaltungszustand der Ruine, welche, nach den vielen Kohlenresten in dem umgebenden Boden zu schliessen, wohl durch Feuer zerstört worden ist, der in der Nähe noch vorhandene Brunnen, die deutliche Umwallung bei dem festen Hause weisen darauf hin, dass nach dem Untergange von Leisenberg eine neue Besiedelung des Platzes schwerlich stattgefunden hat, zumal da keine Chronik des Ortes mehr erwähnt.

wurden die Bodenproben von vegetationslosen Stellen im tiefsten Waldesschatten entnommen, und zwar ist das Erdreich jedesmal unter einer 30 cm im Quadrat haltenden Fläche mit allen früher bezeichneten Vorsichtsmassregeln zuerst bis auf 8 cm Tiefe ausgehoben worden, dann wurde eine zweite, dritte und vierte Schicht von je 8 cm Mächtigkeit ebenso gewonnen. Die Versuche ziehen also dieses Mal eine noch grössere Tiefe als früher — bis zu 32 cm — in Betracht. Das geschah deswegen, weil die Furchen der alten in Rede stehenden Ackerbeete auch jetzt, nachdem sie durch Verwaschung etc. gewiss schon etwas ausgefüllt sind, immer noch eine wesentlich tiefere Lage einnehmen als die Rücken der Beete, d. h. es ist in jenen früheren Zeiten eben anders geackert worden als heutzutage (die Beete ziehen auch bergabwärts anstatt dem Abhange entlang); ferner wurden die Bodenproben immer auf der Höhe der hochrückigen Beete aufgenommen, nicht aus den Furchen, um dem etwaigen Einwande zu begegnen, es möchten in die Furchen von grösseren Oberflächen ungewöhnlich viele Samen zusammengeschwemmt worden sein.

Als Culturgefässe wurden zu den 41 Bodenproben neue Holzkästen in den Dimensionen von 50 : 25 : 10 cm benützt; in denselben diente eine aus kleingeschlagenen neuen Ziegelsteinen hergestellte Lage zur Drainage, auf dieser Steinschicht wurde die Erde gleichmässig ausgebreitet. Den ganzen Sommer und Herbst hindurch standen die Culturen zuerst in einem leeren verschlossenen Gewächshause, später in einem abgeschlossenen Raume des botanischen Museums. Sie wurden mit Leitungswasser begossen, welches niemals frei an die Luft hervortritt, bevor es gebraucht wird, vielmehr aus den in grosser Tiefe unterirdisch gefassten Quellen direct in das Rohrnetz der städtischen Wasserleitung gelangt und erst in den Häusern zum Vorschein kommt.

Uebersicht der Culturen.

(Die Columnen enthalten neben den Namen der aufgegangenen Arten die Zahl der in den einzelnen Culturen resp. Bodenschichten von je 8 cm Tiefe aufgetretenen Individuen derselben, die Menge der Exemplare jeder einzelnen Art und jeder Bodenschicht, und die Gesammtzahl aller Sämlinge in der betr. Versuchsreihe.)

16. Versuch.

Eichenbestand aus 120—130jährigen gepflanzten Eichen, Unterbau aus 30jährigen Buchen und Eichen. Ehemals Hutewald, noch früher Acker gewesen, die sehr breiten hochrückigen Beete deutlich

erkennbar. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Hagen, Distrikt 69“, unweit Catlenburg gelegen. — Versuchsdauer 198 Tage.

	Schichten				zusammen
	a	b	c	d	
Rubus idaeus	1	—	—	—	1
Galium saxatile	3	—	1	—	4
Gnaphalium uliginosum	—	1	1	—	2
Veronica serpyllifolia	—	1	—	1	2
Galeopois bifida [1]	1	—	—	—	1
Gräser	5	2	1	2	10
Unbestimmte Sämlinge	2	—	—	—	2
Frühzeitig abgestorben	3	—	1	—	4
Gesammtzahl	15	4	4	3	26

Im Vergleich mit den übrigen Culturen traten auffallend wenig Sämlinge auf. Theils sind es Waldpflanzen, theils gehören sie der Ackerflora an. Hervorzuheben ist der völlige Mangel an Juncus-Arten, während in allen übrigen Culturen, auch in der Versuchsreihe 17, zu welcher die Erdproben doch in der Nähe von 16 ausgehoben wurden, sehr zahlreiche Binsensämlinge erschienen sind.

17. Versuch.

Eichenbestand, 100—150 jährige gepflanzte Eichen mit 30jährigem Unterbau aus Buchen, war bis 1850/58 als Weidewald benutzt, ehedem aber, wie an den alten Beeten und Furchen aufs deutlichste zu erkennen ist, alter Ackerboden. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Hagen, Distrikt 68^b“, ganz nahe der im 16. Versuche bezeichneten Stelle. — Versuchsdauer 85 Tage.

	Schichten								zusammen
	a^1	a^2	b^1	b^2	c^1	c^2	d^1	d^2	
Ranunculus repens	6	1	—	—	—	—	—	—	7
Cerastium arvense	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Sagina procumbens	—	1	1	2	—	—	—	—	4
Potentilla Tormentilla	36	19	3	6	4	6	—	—	74
Hypericum humifusum	3	2	4	—	—	—	—	—	9
Gnaphalium uliginosum	9	6	1	3	—	—	—	—	19
Veronica serpyllifolia	2	2	—	—	1	—	—	—	5
Luzula campestris	—	2	—	—	—	—	—	—	2
Juncus sp.	119	94	16	33	2	10	2	1	277
Gräser	93	83	23	43	10	19	3	4	278
Unbestimmte Sämlinge	—	—	—	1	—	1	—	—	2
Frühzeitig abgestorben	36	70	17	14	20	11	7	9	184
Gesammtzahl	304	281	65	102	37	47	12	14	862

1) Blüht vom 96. Tage ab.

Bei dieser Versuchsreihe, welche den Versuch 16 deswegen controliren sollte, weil in letzterem so auffallend wenig Sämlinge gekommen waren, wurde jede 8 cm-Bodenschicht in 2 Portionen getheilt und jede dieser 8 Halbportionen dann auf einer eben so grossen Fläche ausgebreitet wie sonst die ungetheilten Proben. Offenbar hängt es mit dieser Art zu cultiviren zusammen, dass so überaus zahlreiche Samen zur Keimung gelangten. Es scheint, dass die Mächtigkeit, Consistenz und Last des über den Samen liegenden Erdreiches in diesen Versuchen von grossem Einfluss darauf ist, ob die Samen zu keimen resp. die Keimlinge bis zur Oberfläche emporzudringen vermögen. Wärme und Feuchtigkeit können demgegenüber nur von geringerer Bedeutung sein, weil die Culturgefässe ohnehin nur die geringe Tiefe von 10 cm haben und dabei eine grosse Fläche darbieten, weil das Gewächshaus seine ziemlich gleichmässige Temperatur sehr bald allen Gefässen mitgetheilt haben musste, und weil die Culturen so ausgiebig begossen wurden, dass immer der ganze Erdboden gleichmässig durchfeuchtet war.

Resultat: Waldpflanzen, Weidepflanzen und einzelne Ackerunkräuter. Bemerkenswerth erscheint die grosse Menge der Binsen und Gräser, welche zusammen 5/6 aller aufgegangenen und erkennbaren Exemplare ausmachen; von den frühzeitig abgestorbenen waren weitaus die meisten hier wie in den folgenden Culturen ebenfalls grasartig, besonders Juncus.

18. Versuch.

Buchenbestand, 50—120jährig (im Durchschnitt 100jährig), mit einzelnen Eichen und anderen Holzarten. Altes Culturland mit sehr deutlichen Beeten und Furchen. — Oberförsterei Catlenburg, bei der sog. „Leisenberger Kirche“ (Distrikt 28), der Ruine nicht einer Kirche, sondern offenbar eines herrschaftlichen Hauses der verschollenen Ortschaft Leisenberg bei Lindau am Harz. Proben unmittelbar bei der Ruine entnommen, bis zu welcher die Ackerbeete laufen. — Viele Ziegelbrocken und Kohlenstückchen im Boden. — Versuchsdauer 198 Tage.

	Schichten a	b	c	d	zusammen
Rubus idaeus	2	1	—	—	3
Lotus corniculatus	3	1	—	1	5
Betula pubescens	4	—	—	—	4
Sambucus racemosa	1	—	—	—	1
Veronica officinalis	—	2	2	2	6
— serpyllifolia	—	—	—	4	4
Luzula pilosa	—	—	2	—	2
Juncus bufonius [1])	40	33	25	12	110
— conglomeratus	16	23	14	9	62
Carex muricata	9	4	—	2	15
Gräser	3	—	—	1	4
Unbestimmte Sämlinge	—	—	—	4	4
Frühzeitig abgestorben	6	3	13	—	22
Gesammtzahl	84	67	56	35	242

Resultat: fast nur Waldpflanzen.

19. Versuch.

Buchenbestand, 50—120jährig (im Durchschnitt 100jährig), Mittelwald, mit einzelnen Eichen und anderen Holzarten. Alte Ackerbeete sehr deutlich. — Oberförsterei Catlenburg, bei der sog. „Leisenberger Kirche“ (Distrikt 28), 200 Schritte von der Stelle, wo die Erdproben für die Versuchsreihe 18 entnommen waren. — Versuchsdauer 198 Tage.

	Schichten a	b	zusammen
Rubus idaeus	4	1	5
Hypericum humifusum [2])	2	—	2
Sambucus racemosa	1	—	1
Sonchus oleraceus	1	—	1
Luzula pilosa	2	—	2
Juncus bufonius	109	5	114
— conglomeratus	3	16	19
Carex muricata	2	—	2
— silvatica	—	1	1
Gräser	2	—	2
Frühzeitig abgestorben	27	4	31
Gesammtzahl	153	27	180

Den Waldpflanzen sind einzelne Ackerunkräuter beigesellt; unter den ersteren sind 5 Arten mit solchen aus der Versuchsreihe 18 identisch.

1) Blüht vom 186. Tage ab; 2) blüht vom 108. Tage ab.

20. Versuch.

Buchenbestand, durchschnittlich 100jährig. — Oberförsterei Catlenburg, unweit der „Leisenberger Kirche", in einer vom Volksmunde als „alter Kirchhof" bezeichneten Umwallung. Der Boden enthält viele Topfscherben. — Versuchsdauer 198 Tage.

	Schichten			zusammen
	a	b	c	
Rubus idaeus	3	1	—	4
Fragaria vesca	—	—	1	1
Trifolium repens	—	1	—	1
Betula pubescens	3	—	—	3
Veronica officinalis	1	1	—	2
Luzula campestris	1	3	—	4
— pilosa	—	2	2	4
Juncus bufonius	88	64	43	195
— conglomeratus	18	57	25	100
Carex muricata	—	—	1	1
Gräser	—	1	—	1
Frühzeitig abgestorben	54	36	9	99
Gesammtzahl	168	166	81	415

Nur Wald- und Weidepflanzen. Auf die Benutzung der eingefriedigten Stelle als Kirchhof ergiebt sich kein Hinweis.

21. Versuch.

Buchenwald, 90–120jährig (durchschnittlich 100jährig), mit wenigen Eichen. Die Ackerbeete laufen an dieser Stelle steil bergabwärts, sie sind sehr deutlich und besonders hochrückig. Bodenprobe wie immer auf der Beethöhe entnommen. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Thiershausen, Distrikt 7^{b}". — Versuchsdauer 198 Tage.

	Schichten				zusammen
	a	b	c	d	
Rubus idaeus	1	1	1	1	4
Lotus corniculatus	3	1	—	—	4
Veronica officinalis	3	4	—	—	7
— serpyllifolia	—	10	1	2	13
Luzula pilosa	5	1	1	—	7
Juncus bufonius [1])	52	38	4	4	98
— conglomeratus	48	53	19	11	131
Carex muricata	1	—	—	—	1
— silvatica	2	3	—	1	6
Poa nemoralis [2])	2	—	—	—	2
Gräser	7	1	1	—	9
Frühzeitig abgestorben	46	4	6	6	62
Gesammtzahl	170	116	33	25	344

Fast nur Waldpflanzen.

1) Blüht vom 186. Tage ab; 2) blüht vom 108. Tage ab.

22. Versuch.

Buchenbestand, 100—150jährig, angeblich auf ehemaligem Ackerlande, dessen Spuren indessen nicht mehr ersichtlich sind. — Oberförsterei Catlenburg, auf dem Dutberge bei Wulften; Bodenprobe unter den ältesten Buchen entnommen. — Versuchsdauer 105 Tage.

	Schichten				zusammen
	a	b	c	d	
Stellaria media	2	1	—	—	3
Rubus idaeus	9	12	3	1	25
Hypericum humifusum	—	1	1	—	2
Linum catharticum	3	—	—	—	3
Betula pubescens	1	—	—	—	1
Sambucus racemosa	1	1	2	—	4
Cirsium arvense	1	—	—	—	1
Senecio Fuchsii	1	—	—	—	1
Scrophularia nodosa	1	3	1	—	5
Juncus bufonius	70	127	108	34	339
? — conglomeratus [1])	36	—	—	—	36
Gräser	—	1	—	—	1
Unbestimmte Sämlinge	—	—	—	2	2
Frühzeitig abgestorben	11	19	7	—	37
Gesammtzahl	136	165	122	37	460

Unter den vorherrschenden Waldpflanzen finden sich einige Ackerunkräuter.

23. Versuch.

Fichtenbestand, 18jährig, auf Ackerland, welches bis vor 20 Jahren als solches benutzt wurde. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Thiershausen, Distrikt 17c“. — Versuchsdauer 169 Tage.

	Schichten				zusammen
	a	b	c	d	
Sisymbrium Thalianum [2])	—	1	—	—	1
Sagina procumbens [3])	26	8	1	—	35
Scleranthus annuus [4])	1	1	—	—	2
Betula pubescens	3	—	—	—	3
Rumex Acetosella	8	2	—	—	10
Transport	38	12	1	—	51

1) Die Juncus-Keimlinge waren meist noch zu wenig entwickelt, um sie mit Sicherheit nach dem äusseren Ansehen bestimmen zu können.

2) Hat am 54. Tage geblüht; 3) blüht vom 80. Tage ab; 4) vom 69. Tage ab.

	Schichten a	b	c	d	zusammen
Transport	38	12	1	—	51
Hypericum humifusum[1]	23	8	8	3	42
Vicia angustifolia	—	1	—	—	1
Achillea Millefolium	1	—	—	—	1
Matricaria inodora[2]	1	—	—	—	1
Gnaphalium uliginosum[3]	5	3	1	—	9
— silvaticum	2	—	—	—	2
Lampsana communis[4]	1	—	—	—	1
Hypochoeris radicata	2	—	—	—	2
Anagallis arvensis[5]	2	3	—	—	5
Centunculus minimus[6]	—	2	—	—	2
Myosotis stricta[7]	3	1	—	—	4
Juncus bufonius[8]	30	39	9	10	88
— conglomeratus	1	1	—	—	2
Gräser	3	—	1	—	4
Frühzeitig abgestorben	16	13	12	3	44
Gesammtzahl	128	83	32	16	259

Eine reiche Ackerflora: es finden sich nur 2 Arten Waldpflanzen, die Ackerunkräuter herrschen mit 14 Arten vor, außerdem einige Ubiquisten.

24. Versuch.

Fichtenbestand, 18jährig, auf Ackerland, welches bis vor 20 Jahren als solches noch benutzt wurde. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Thiershausen, Distrikt 17c“, an einer anderen Stelle als der Versuch 23. — Versuchsdauer 169 Tage.

	Schichten a	b	c	d	zusammen
Sisymbrium Thalianum[9]	1	4	—	—	5
Raphanus Raphanistrum[10]	—	3	—	—	3
Sagina procumbens[11]	11	8	1	—	20
Scleranthus annuus[12]	1	2	—	—	3
Betula pubescens	1	—	—	—	1
Rumex Acetosella	2	1	—	—	3
Trifolium procumbens	1	—	—	—	1
— repens	1	2	2	—	5
Transport	18	20	3	—	41

1) Blüht vom 78. Tage ab; 2) vom 144. Tage ab, Köpfchen sehr klein und dürftig; 3) blüht vom 105. Tage ab; 4) vom 79. Tage ab; 5) vom 75. Tage ab; 6) vom 112. Tage ab; 7) vom 69. Tage ab; 8) vom 151. Tage ab;

9) blüht vom 54. Tage ab; 10) vom 52. Tage; 11) vom 81. Tage; 12) vom 69. Tage ab.

	Schichten a	b	c	d	zusammen
Transport	18	20	3	—	41
Gnaphalium uliginosum [1])	5	2	—	—	7
Anagallis arvensis [2])	1	2	—	—	3
Plantago major [3])	—	4	—	2	6
Veronica serpyllifolia	—	—	—	1	1
Myosotis stricta [4])	8	5	2	—	15
Juncus bufonius [5])	32	32	12	9	85
Bromus mollis	10	2	1	—	13
Poa annua [6])	—	2	—	—	2
Gräser	4	3	1	—	8
Unbestimmte Sämlinge	—	5	9	—	14
Frühzeitig abgestorben	35	28	10	29	102
Gesammtzahl	113	105	38	41	297

Resultat sehr ähnlich wie in der Versuchsreihe 23: eine reiche Flora von Ackerpflanzen (15 Arten), von welchen mehr als die Hälfte (9 Arten) mit solchen aus 23 übereinstimmen; außerdem als Waldpflanze nur Betula.

25. Versuch.

Fichtenbestand, 35jährig, auf ehemaligem bis vor c. 40 Jahren benutztem Ackerlande. — Oberförsterei Catlenburg, Forstort „Radebreite, Distrikt 11c“. — Versuchsdauer 169 Tage.

	Schichten a	b	c	d	zusammen
Sagina procumbens	3	3	3	—	9
Rumex nemorosus	1	—	—	—	1
Chenopodium polyspermum [7])	29	20	4	2	55
Rubus idaeus	1	—	—	—	1
Fragaria vesca	1	—	—	—	1
Hypericum humifusum	1	1	—	—	2
Gnaphalium uliginosum [8])	10	23	1	—	34
Veronica serpyllifolia	—	—	1	—	1
— arvensis	1	—	—	—	1
— officinalis	—	1	—	—	1
Juncus bufonius [9])	5	5	—	—	10
— conglomeratus	—	—	—	1	1
Luzula campestris	—	3	—	—	3
Carex muricata	—	—	1	—	1
Gräser	2	5	1	—	8
Frühzeitig abgestorben	11	7	37	19	74
Gesammtzahl	65	68	48	22	203

1) Blüht vom 99. Tage ab; 2) vom 73. Tage; 3) vom 93. Tage; 4) vom 55.

Eigenthümliche Mischung von Wald- und Ackerpflanzen, von beiden je 6—7 Arten; unter den letzteren fällt die große Menge von Chenopodium polyspermum auf, welches in abnehmender Zahl bis zur tiefsten untersuchten Bodenschicht eingedrungen ist.

Verzeichniß der aufgegangenen und bestimmbaren Arten.

A. Versuchsreihen 16 bis 22: 100—150jährige Waldbestände über Ländereien, welche zuletzt vor mehreren Jahrhunderten Acker waren.

1. Waldpflanzen:	Rubus idaeus	Veronica officinalis
	Fragaria vesca	Luzula pilosa
	Betula pubescens	Carex muricata
	Sambucus racemosa	— silvatica
	Senecio Fuchsii	Poa nemoralis.
	Scrophularia nodosa	
2. Ackerunkräuter:		
	Stellaria media	Sonchus oleraceus
	Hypericum humifusum	Galeopsis bifida
	Cirsium arvense	Juncus bufonius.
3. Weidepflanzen:	Ranunculus repens	Linum catharticum
	Cerastium arvense	Galium saxatile
	Sagina procumbens	Gnaphalium uliginosum
	Potentilla Tormentilla	Veronica serpyllifolia
	Lotus corniculatus	Luzula campestris
	Trifolium repens	Juncus conglomeratus.

B. Versuchsreihen 23 bis 25: junge (18—35jährige) Waldbestände über ehemaligem Ackerboden.

1. Waldpflanzen:	Rubus idaeus	Gnaphalium silvaticum
	Fragaria vesca	Veronica officinalis
	Betula pubescens	Carex muricata.
	Rumex nemorosus	
2. Ackerunkräuter:		
	Raphanus Raphanistrum	Lampsana communis
	Sisymbrium Thalianum	Anagallis arvensis
	Scleranthus annuus	Centunculus minimus

Tage ab, hat Sämlinge erzeugt; 5) vom 81. Tage ab; 6) vom 114. Tage ab; 7) blüht vom 71. Tage ab, hat zahlreiche Sämlinge gebildet; 8) blüht vom 98. Tage; 9) vom 81. Tage ab.

	Rumex Acetosella	Veronica arvensis
	Chenopodium polyspermum	Myosotis stricta
	Vicia angustifolia	Juncus bufonius
	Hypericum humifusum	Bromus mollis
	Matricaria inodora	Poa annua.
3. Weidepflanzen:	Sagina procumbens	Achillea Millefolium
	Trifolium repens	Plantago major
	— procumbens	Veronica serpyllifolia
	Hypochoeris radicata	Luzula campestris
	Gnaphalium uliginosum	Juncus conglomeratus.

Zahl der aufgegangenen Exemplare und der bestimmbaren Arten.

Versuchsreihe	Bodenschichten a 0—8 cm	b 8—16 cm	c 16—24 cm	d 24—32 cm	Gesammtzahl der Exemplare	Zahl der Arten
16	15	4	4	3	26	5
17	585	167	84	26	862	9
18	84	67	56	35	242	10
19	153	27	—	—	180	9
20	168	166	81	—	415	10
21	170	116	33	25	344	10
22	136	165	122	37	460	11
16—22	1311	712	380	126	2529	29
23	128	83	32	16	259	18
24	113	105	38	41	297	16
25	65	68	48	22	203	14
23—25	306	256	118	79	759	33
16—25	1617 a	968 b	498 c	205 d	3288	49

Das Verhältniß der aufgegangenen Exemplare ist für alle 10 Versuchsreihen zusammen in den Bodenschichten a : b : c : d = 7,9 : 4,7 : 2,4 : 1.

Von den 49 bestimmten Arten kommen 25 auch in den Culturreihen 1—15 vor.

Auch bei dieser Reihe von Versuchen konnte, ebenso wie bei den früheren, das Verhalten eines neuangelegten Saatkampes zum Vergleich herangezogen werden. Denn zufälliger Weise war sehr zeitig im Frühjahr 1894 unweit Thiershausen, am „Mühlenberge“

eine Waldparzelle über altem Ackerlande in einen Kamp verwandelt worden. Auf meinen Wunsch blieb derselbe bis Ende August ungejätet, damit die aufgehenden Kräuter bestimmt werden könnten. Bis zu diesem Zeitpunkt hatten sich folgende Arten eingestellt:

Fumaria officinalis
Stellaria Holostea
— — media
Moehringia trinervia
— Sagina procumbens
Viola silvatica
— Hypericum humifusum
— perforatum
Epilobium montanum
Circaea intermedia
— Rubus idaeus
— Fragaria vesca
— Lotus corniculatus
Daucus Carota
Torilis Anthriscus
Chenopodium album
Polygonum Persicaria
— aviculare
Rubia tinctorum
Knautia arvensis integr.
Leucanthemum vulgare
Senecio Jacobaea
— vulgaris
— Gnaphalium silvaticum
— — uliginosum
— Achillea Millefolium
— Cirsium arvense
— Hypochoeris radicata
Sonchus arvensis
— — oleraceus
— Lampsana communis
— Scrophularia nodosa
— Veronica serpyllifolia
Glechoma hederaceum
Stachys silvatica
— Plantago major
— Myosotis stricta
Pulmonaria obscura
— Juncus bufonius
— — conglomeratus
Poa compressa.

Von diesen 41 Arten sind etwa die Hälfte Ackerunkräuter; die 19 mit — bezeichneten finden sich auch in den Culturversuchen 16 bis 25 wieder. Auffallend erscheint Rubia tinctorum, eine Pflanze, welche in Mitteleuropa nicht einheimisch ist, seit Alters jedoch als Farbpflanze (Krapp) vielfach angebaut wurde. Gegenwärtig wird sie in der Gegend von Lindau und Catlenburg nirgends cultivirt, auch ist es nicht nachweisbar, daß dies in näherer Vergangenheit geschehen ist. Es bleibt daher nur die Annahme übrig, daß die Pflanze durch die Mönche des alten Klosters Renshausen, zu dessen Feldflur der jetzige Forstort „Mühlenberg“ gehört hat, cultivirt worden ist.

Unter den Ergebnissen der Versuche 16 bis 25 dürfte noch folgendes von Interesse erscheinen.

Aus allen Bodenproben sind Samen aufgegangen; letztere sind in der überwiegenden Mehrzahl als „ruhende Samen“ seit langer Zeit im Erdboden verborgen gewesen.

Die Culturen der sehr alten Ackerböden, welche jetzt unter mehr als 100 jährigem Walde liegen, haben neben einer Anzahl Waldpflanzen nur wenige Arten von Ackerunkräutern ergeben. Darunter kamen Cirsium arvense, Sonchus oleraceus und Galeopsis bifida nur in je 1 Exemplar vor, und zwar immer nur aus der obersten Bodenschicht. Es erscheint daher eine zufällige Verschleppung dieser mit besonderen Verbreitungseinrichtungen ausgerüsteten Früchte nicht völlig ausgeschlossen, und es ist vielleicht dem Vorkommen dieser Arten in den Culturen keine allzugroße Wichtigkeit beizumessen. Anders jedoch steht es mit den kleinsamigen Arten wie Hypericum humifusum, Stellaria media, Juncus bufonius, welche — theilweise in Menge — bis zu den untersten Schichten vorgekommen sind. Sie lagen gewiß schon sehr lange im Erdboden, und für diese möchte, um so mehr als sie auch in den vorjährigen resp. in vielen anderen diesjährigen Culturen regelmäßig aufgetreten sind, die Eigenschaft der „ruhenden“ Samen mit Recht in Anspruch zu nehmen sein.

Von den meisten Weidepflanzen, welche aus den sehr alten Ackerböden aufgegangen sind, könnte vielleicht eher angenommen werden, daß sie aus der Zeit stammen, wo — bis vor 36 Jahren — diese Forsten als Hutewälder benutzt wurden, als daß sie seit den sehr weit zurückliegenden Zeiten ruhend geblieben sind, wo diese Flächen thatsächlich noch unter landwirthschaftlichem Betriebe standen. Denn 8 von den 12 constatirten Arten liefen in jenen Erdproben auf, welche aus dem ehemaligen Hutewalde auf dem „Hagen“ bei Catlenburg genommen wurden. Sie müßten also bei der stattgehabten Hutenutzung durch die zu- und abgehenden Viehherden dort eingeschleppt worden sein. Spricht auch keine große Wahrscheinlichkeit dafür, so bestätigen sie immerhin, selbst in dem Fall der Richtigkeit dieser Annahme, die Dauer der Keimfähigkeit „ruhender“ Samen über mehr als 3 Jahrzehnte, denn in diesen 100—150jährigen Eichen- und Buchenwäldern vermögen Acker- und Weidepflanzen gewiß schon längst nicht mehr zu existiren, geschweige denn zur Samenreife zu gelangen.

Was ferner die Versuche mit den Erdproben aus jüngeren Waldbeständen über ehemaligem Ackerlande anbetrifft, so stimmen die Resultate derselben so völlig mit denjenigen von 1893 überein, daß wenig hinzuzufügen bleibt. Die Zahl der aufgegangenen Waldpflanzen ist gering, diejenige der Ackerunkräuter überwiegt weit,

und auch die Artenzahl der Weidepflanzen ist ansehnlich. Der Charakter des Bodens als früherer Acker tritt somit evident hervor, obwohl — es soll nicht unterlassen werden dies wiederholt zu betonen — alle Orte, aus denen die cultivirten Bodenproben stammen, seit längerer Zeit über größere Flächen hin völlig vegetationslos gewesen sind.

Wie in den älteren Culturen, so tritt auch in den neuen eine starke Abnahme der Individuenzahl von den höheren zu den tieferen Bodenschichten hervor, im ganzen wie 7,9 : 4,7 : 2,4 : 1. In den einzelnen Versuchsreihen nehmen die Zahlen öfters von der obersten bis zur untersten Schicht ziemlich gleichmäßig ab, nicht selten jedoch zeigt sich ein rascheres Abfallen um die Tiefe von 16—20 cm herum. Dies hängt von dreierlei Ursachen ab. Erstens bringt die Beackerung des Bodens zwar sehr zahlreiche Sämereien in die Erde, aber doch nur bis in eine gewisse Tiefe, welche für den vorliegenden Fall wohl auf etwa 20 cm veranschlagt werden darf. Zweitens können durch die Thätigkeit von Thieren (Mäuse, Maulwürfe, Grillen, Regenwürmer etc.) manche Samen noch über diese Tiefe hinaus in die Erde gelangen. Endlich werden infolge von Schwankungen der Temperatur und des Feuchtigkeitsgehaltes des Bodens sehr kleine Samen bis zu noch bedeutenderen Tiefen hinabbefördert. So ist es zu verstehen, daß im allgemeinen die Zahl der Sämlinge mit der Tiefenlage in der cultivirten Bodenschicht abnimmt, und daß aus den untersten Schichten viel mehr Arten mit kleinen Samen als solche mit größeren Samen aufgegangen sind. Wie tief Samen überhaupt in den Boden einzudringen vermögen, soll bei anderer Gelegenheit erörtert werden. Die obersten 16 cm eines ehemaligen Ackerbodens erweisen sich öfters mit — freilich meist halb verrotteten — Sämereien derartig durchsetzt, daß es aussieht, als hätte man absichtlich eine Fülle von Samen unter die Erde gemengt.

An Zahl der aufgegangenen Exemplare sind denn auch die neuen Culturen hinter den früheren nicht zurückgeblieben, vielmehr haben sie dieselben noch bedeutend übertroffen. Wenn z. B. die beiden oberen Bodenschichten von je 8 cm Mächtigkeit in den ersten 15 Versuchsreihen zusammen 1441, also auf jeden Versuch 96 Sämlinge, die 3 oberen Schichten in den Versuchsreihen 6 bis 15 zusammen 1076, also auf jeden Versuch 108 Sämlinge ergaben, so lieferten die Versuchsreihen 16 bis 25 aus den beiden oberen Bodenschichten zusammen 2585, auf jeden einzelnen Versuch demnach 258 Sämlinge, und aus den 3 oberen Schichten zusammen 3083, auf jeden Versuch daher 308 Sämlinge, also fast

das 3fache gegenüber den erstgenannten 15 Versuchsreihen. Zu diesem Ergebniß haben ohne Zweifel verschiedene Ursachen mitgewirkt: theils sind wohl die lokalen Verhältnisse für die Conservirung der Samen in der Gegend von Catlenburg (Sandsteingebiet) günstiger als in der Nähe von Göttingen (Muschelkalk), theils ist auch die Culturmethode von Einfluß gewesen, da die Versuchskästen für 16 bis 25 in einem anderen Gewächshause standen als die früheren, unter gleichmäßigerer Temperatur und besserer Lichtvertheilung.

Unter den in den Culturen erschienenen Sämlingen waren immer mehr oder minder zahlreiche, welche über die ersten Keimungsstadien nicht hinauskamen, sondern frühzeitig zu Grunde gingen. Es ist ganz sicher, daß durchaus nicht etwa eine größere Anzahl solcher Pflänzchen durch das — übrigens mit aller Vorsicht bewerkstelligte — Gießen herausgeschwemmt und dadurch dem Verderben preisgegeben worden sind, vielmehr ist anzunehmen, daß weitaus die meisten dieser so früh abgestorbenen Pflänzchen Schwächlinge waren, Schwächlinge deshalb, weil die Samen so lange ruhend gewesen waren und ein Theil derselben dabei an Lebensenergie mehr eingebüßt hatte als die übrigen. Der Antheil dieser Kümmerlinge an der Gesammtzahl der Keimlinge ist in den verschiedenen Culturen begreiflicher Weise sehr ungleich, zuweilen ist er sehr hoch und steigt über $^1/_4$, ja sogar bis über $^1/_3$ der Gesammtsumme aller Sämlinge.

Wenn auch mit den vorstehend beschriebenen Culturversuchen die Frage nach der Dauer der Conservirung der Keimfähigkeit „ruhend“ gewordener Samen im Erdboden noch keineswegs erledigt wird, so besteht dem Gesagten zufolge doch die begründete Vermuthung, daß für viele Acker- und Weidekräuter die Grenze, bis zu welcher ihre „ruhenden“ Samen die Keimfähigkeit noch nicht verlieren, ziemlich viel weiter als ein halbes Jahrhundert zu setzen sein wird.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).